

HEINRICH·HERTZ·INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN·CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 117

Versuch einer dynamischen Theorie
der gestrichenen Saite

von

Hans Lazarus

Berlin

1 9 7 0

Versuch einer dynamischen Theorie der gestrichenen
Saite.

Zusammenfassung:

Ausgehend von einigen Messungen zum Problem der gestrichenen Saite wird versucht, die dynamischen Vorgänge mit Hilfe folgenden Modells der gestrichenen Saite zu beschreiben. An der Anstreichstelle wirkt zwischen der Saite und dem Bogen eine Reibungskennlinie. An dem einen Ende ist die ideale Saite starr eingespannt, an dem anderen Ende ist die Saite einmal mit einem reellen Widerstand, zum anderen mit einem einfachen komplexen Widerstand abgeschlossen.

Diese Betrachtungsweise gestattet es, näherungsweise den Einfluß des Bogendruckes zu beschreiben.

HEINRICH - HERTZ - Institut für Schwingungs-
forschung

Der Bearbeiter :

Hans Lazarus

(Dipl.-Ing. Hans Lazarus)



Der Abteilungsleiter:

L. Cremer

(Prof. Dr.-Ing. L. Cremer)

Der Institutsdirektor:

P. Matthieu

(Prof. Dr.phil. P. Matthieu)

Berlin-Charlottenburg, den 15.4.70

Inhaltsübersicht

	Seite
1. Einleitung	3
2. Versuch einer dynamischen Theorie	7
2.1 Problemstellung	7
2.2 Berechnung der Lösung durch Synthese der Teilwellen	10
2.3 Berechnung der Lösung durch Synthese der Eigenfunktionen	17
3. Literatur	28
4. Abbildungen	29

1. Einleitung

In dieser Arbeit wird versucht, die gestrichene Saite durch eine dynamische Theorie zu beschreiben.

Die Einleitung umreißt kurz die vorhandenen theoretischen Überlegungen, Beobachtungen, Messungen und Ergebnisse zum Problem der gestrichenen Saite.

Die erste brauchbare Theorie, die die Messungen befriedigend beschreibt, wurde von Helmholtz /1/ 1860 entwickelt. Seine kinematische Theorie erklärt den Zusammenhang zwischen der Amplitude v , dem Anstreichort x_a und der Bogengeschwindigkeit v_B in jedem Punkt der Saite:

$$\Delta v : v_+ : |v_-| = 1 : x : 1 - x, \quad \Delta v = \frac{1}{x_a} v_B \quad (1)$$

Der Zeitverlauf der Auslenkung y und der Schnelle v dieses Holmholtztyps mit den in Gleichung (1) angegebenen Größen ist in Abb. (1) dargestellt. Von RAMAN /2/ und KRIGAR-MENZEL /3/ wurde diese kinematische Beschreibung der Saitenbewegung durch freie Wellenbewegungen erweitert bzw. vervollständigt. Es ergibt sich aus diesen Überlegungen, daß der oben beschriebene Helmholtztyp - selbst nur in einer modifizierten Form - sich nur einstellt, wenn der Anstreichort x_a zur Gesamtlänge l der Saite sich verhält wie $\frac{l}{x_a} = i$, mit $i = 1, 2, 3 \dots$. Da die Harmonischen, die an dieser Anstreichstelle einen Knoten haben, nicht erregt werden können, müssen diese von den Harmonischen des eigentlichen Helmholtztyps abgezogen werden:

$$v(t) = \frac{2\Delta v}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) - \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right)$$

Dabei stellt die erste Summe die Schnelle des eigentlichen Helmholtztyps dar; die zweite Summe kennzeichnet die nicht erregbaren Harmonischen. Die Schnelle eines modifizierten Helmholtztyps für $\frac{l}{x_a} = 4$ ist in Abb. 2 dargestellt.

Zur Beurteilung der dynamischen Vorgänge ist die Kenntnis der Energiezufuhr am Anstreichpunkt und der im System vorhandenen Energieverluste notwendig.

Die zwischen Bogen und Saite wirkende Reibungskennlinie, die von mehreren Autoren angegeben wird, wurde noch einmal unter verschiedenen Bogenandruckkräften F_z und zwei verschiedenen Arten von Kolophonium gemessen. Es ergaben sich vor allen Dingen bei verschiedenen Bogenandruckkräften F_z unterschiedliche maximale Haftreibungspunkte (F_{yHmax}) (Abb. 3).

Der eventuelle longitudinale Innenwiderstand der Bogenhaare oder des hier benutzten Perlonbandes wurde in einer Arbeit von OTTMER /4/ gemessen. Die Bogenhaare wurden zwischen zwei feste Enden eingespannt und in der Mitte mit einem elektrodynamischen System erregt, an dessen Eingang der Strom und die Spannung gemessen wurden (Abb. 4). Dieser longitudinale Widerstand der Bogenhaare ist in Abb. 5 aufgetragen. Der longitudinale Widerstand w_B der Bogenhaare ist im interessierenden Frequenzbereich groß gegenüber der Kennimpedanz der Saite $m'c$. Der Widerstand der Bogenhaare w_B bleibt unterhalb der ersten longitudinalen Resonanz bei 1250Hz immer groß $w_B > 5 \frac{p \cdot s}{mm}$ gegenüber der Kennimpedanz, z.B. einer umsponnenen d-Saite $m'c = 0,04 \frac{p \cdot s}{mm}$. Der Bogen kann also gegenüber der Saite als starr betrachtet werden, d.h. der Bogen zwingt in der Haftphase seine Geschwindigkeit der Saite auf.

Mißt man die Schnelle des Schwerpunktes der Saite direkt am Anstreichort mit einem elektrodynamischen Verfahren (Abb. 6), so erkennt man, daß die in der Haftphase erwartete Gleichheit von Saitenschnelle und konstanter Bogengeschwindigkeit nur im Mittel besteht. Es sind vor allen Dingen bei großen Bogendruckkräften kleine Schwankungen zu beobachten (Abb. 7, 8). Diese Schwankungen der

Schnelle während der Haftphase lassen sich durch das exzentrische Angreifen des Bogens an die Saite erklären. Der Bogen erregt die Saite nicht nur zu Transversal- sondern auch zu Torsionsschwingungen. Die von TIPPE /5/ benutzte optische Apparatur zur Messung der Torsionsschwingungen ist mit einigen nachgezeichneten Oszillographenbildern in Abb. 9 angegeben.

Der durch das exzentrische Angreifen des Bogens sich ergebende Reflexions- und Transmissionsfaktor für die Transversalwelle ist von LAZARUS und EISENBERG /6/ untersucht worden. An eine ca. 30 m lange Saite wurde in der Mitte ein Bogen an die Saite gedrückt, so daß immer Haftreibung vorlag. An einem Ende wurde die Saite mit einem kurzen transversalen Gaußtonimpuls angeregt und dann der reflektierte und transmittierte Transversalimpuls gemessen (Abb. 10, 11). Einige Meßergebnisse sind in Abb. 12 dargestellt. Der Bogen reflektiert eine Transversalwelle in der Haftphase je nach Durchmesser der Saite nur zu $50 \pm 90 \%$, der Rest wird transmittiert.

Der eingeschwungene Zustand einer angestrichenen Saite ist nur zwischen gewissen Grenzen der Bogenandruckkraft F_Z , dem sogenannten minimalen und maximalen "Bogendruck" $F_Z \max$ und $F_Z \min$ möglich. Der minimale "Bogendruck" wurde von verschiedenen Autoren, wie RAMAN /2/ und ROLOFF /7/ gemessen. Die minimale Bogenandruckkraft ist die Kraft, die gerade noch den eingeschwungenen Zustand (Helmholtztyp) aufrechterhält. Eigene Meßergebnisse befinden sich in Abb. 13, 14. Innerhalb dieser Grenzen hat der Bogendruck nur geringen Einfluß auf den eingeschwungenen HELMHOLTZ-Typ. Die Änderung des Bogendruckes verändert nur in geringerem Maße die Dauer der Gleitphase und die Dauer des Übergangs von der Haftphase zur Gleitphase und umgekehrt (Abb. 7,8). Diese Veränderung am Zeitverlauf stimmt mit den Beobachtungen von Geigern überein, daß bei ansteigendem Bogendruck und bei sonst unveränderten Bedingungen der Anteil der hohen Frequenzen zunimmt. Dieser

Einfluß des "Bogendruckes" läßt sich im Prinzip durch das Vorhandensein einer Biegesteife, LAZARUS /8/, oder durch einen komplexen Abschlußwiderstand an einem Ende der Saite (CREMER, LAZARUS /9/) erklären. Eine befriedigende Klärung kann erst eine dynamische Theorie bringen.

Damit sind kurz die Vorgänge am Anstreichort umrissen, an dem die schwingende Saite dem Bogen die notwendige Energie entzieht, um den stationären Zustand aufrecht zu erhalten (Selbsterregungsmechanismus).

Die andere Frage ist, welche Art von Verlusten müssen durch diese Energieentnahme am Anstreichort gedeckt werden. Verluste folgender Art sind möglich:

1. An der Anstreichstelle wirkt zwischen Bogen und Saite in einem gewissen Zeitabschnitt in jeder Periode eine Gleitkraft. Dieser Energieverlust $2 F_G \cdot y$ kann jedoch durch eine im Mittel gleich große Haftreibungskraft ($\bar{F}_H = \bar{F}_G$) in einer Periode wieder ausgeglichen werden.
2. Innere Verluste in der Saite sind bei Transversalschwingungen durch eine komplexe Biegesteife, bei Longitudinal-Schwingungen durch einen komplexen Elastizitätsmodul zu erfassen. Der Einfluß der Biegesteife läßt sich durch einen kleinen Saitendurchmesser und der der Longitudinalschwingungen durch geringe Schwingungsamplituden klein halten.
3. Die unmittelbaren Abstrahlungsverluste an der Saite lassen sich auch durch einen kleinen Saitendurchmesser gering halten.
4. Verhältnismäßig schwierig sind die Verluste in den Einspannungen der Saite zu erfassen. Einige Messungen von Abklingkonstanten von Saiten mit zwei verschiedenen Einspannungen liegen von

REINICKE /10/ vor (Abb. 15). Ist die Saite auf ein Instrument gespannt, so bestimmt im wesentlichen der Streichinstrumentenkörper die Verluste.

Da bei einem Streichinstrument notwendigerweise an einem Ende der Saite dieser Energie entzogen wird - innere Verluste und Abstrahlungsverluste des Geigenkörpers -, wird versucht, ein Modell der gestrichenen Saite zu untersuchen, in dem die Verluste an einem Ende konzentriert sind.

2. Versuch einer dynamischen Theorie

2.1 Problemstellung

Nach den bisher beschriebenen Einschränkungen wird das Problem der gestrichenen Saite wie folgt formuliert: Eine Saite wird an der Stelle $x = 0$ von einem Bogen der Breite $b \rightarrow 0$ mit der Schnelle v_B angestrichen und mit einem "Bogendruck" F_Z gegen die Saite gedrückt. Zwischen Bogen und Saite wirkt die Reibungskennlinie F_R (Abb. 3). Die Saite selbst ist durch ihren Massenbelag m' und die Spannkraft F_x gekennzeichnet.

Die Auslenkung y genügt der Wellengleichung

$$c^2 y''(x,t) = \ddot{y}(x,t) \quad (2)$$

mit

$$c = \sqrt{\frac{F_x}{m'}}$$

An den Enden ist die Neigung y' , die einer Querkraft $Q = -F_x \cdot y'$ entspricht, mit der Schnelle v durch ein vorgegebenes Differentialgleichungssystem verkoppelt.

Wir suchen eine periodische Lösung des Systems, die an der Anstreichstelle die konstante Bogengeschwindigkeit in der Haftphase und die vorgegebene Gleitkraft in der Gleitphase berücksichtigt. Eine Verkopplung der Schnelle $v(x,t)$ und der Kraft an der Anstreichstelle $F_y(t)$ beschreibt das Faltungsintegral

$$v(x,t) = \int_0^t A(x,t - \tau) F_y(\tau) d\tau \quad (3)$$

Dabei ist $A(x,t)$ die Antwortfunktion des Systems (Saite plus Randbedingung an den Enden) auf einen Diracimpuls. An der Anstreichstelle muß das Faltungsintegral ($x = 0$)

$$v(0,t) = \int_0^t A(0,t - \tau) F_y(\tau) d\tau \quad (4)$$

und die Reibungskennlinie F_R

$$F_y(t) = F_R(v(0,t) - v_B) \quad (5)$$

erfüllt werden. Gesucht ist eine periodische Lösung mit der Periode T ab einem bestimmten Zeitpunkt t^* , dann gilt zusätzlich bei $t > t^*$:

$$v(x,t + T) = v(x,t), \quad \int_0^T v(x,t) dt = 0 \quad (6)$$

Zur Berechnung der Antwortfunktion $A(x,t)$ benutzt man zweckmäßig die Laplacetransformation. Zur Bestimmung des gesuchten Kraftverlaufes in der Haftphase und des Schnelleverlaufes in der Gleitphase muß dann im Zeitbereich das Faltungsintegral (Gl. 3) mit der bekannten Antwortfunktion und die Reibungskennlinie (Gl. 5) erfüllt werden. Die Antwortfunktion $A(x,t)$ berechnet man aus dem Eingangswiderstand $w(x,p)$ der Saite an der Stelle x über die Laplacerücktransformation:

$$A(x,t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{w(x,p)} \right) \quad (7)$$

mit

$$\frac{1}{w(x,p)} = \int_0^{\infty} A(x,t) e^{-pt} dt .$$

Den Eingangswiderstand erhält man durch die Transformation der Wellengleichung für die Auslenkung y bzw. Schnelle v und der Querkraft $Q = -F_x y'$ und den bekannten Randbedingungen an den Enden in den Laplace Unterbereich. Es gelten dann folgende Beziehungen (Bezeichnungen siehe Abb. 16):

$$x = x_1$$

$$\frac{1}{w(x_1, p)} = \frac{v(x_1, p)}{Q(p)} = \frac{Y(\sinh \gamma(l_1 - x) + \frac{1}{\gamma w_1} \cosh \gamma(l_1 - x))(\sinh \gamma l_2 + \frac{1}{\gamma w_2} \cosh \gamma l_2)}{(1 + \frac{1}{\gamma^2 w_1 w_2}) \sinh \gamma l + (\frac{1}{\gamma w_1} + \frac{1}{\gamma w_2}) \cosh \gamma l}$$

$$x = x_2 \tag{18}$$

$$\frac{1}{w(x_1, p)} = \frac{Y(\sinh \gamma l_1 + \frac{1}{\gamma w_1} \cosh \gamma l_1)(\sinh \gamma(l_2 - x) + \frac{1}{\gamma w_2} \cosh \gamma(l_2 - x))}{(1 + \frac{1}{\gamma^2 w_1 w_2}) \sinh \gamma l + (\frac{1}{\gamma w_1} + \frac{1}{\gamma w_2}) \cosh \gamma l}$$

bei

$$x_1 = x_2 = 0 \quad v(x_1 = 0, p) = v(x_2 = 0, p) \\ Q(x_1 = 0, p) + Q(x_2 = 0, p) = Q(p) = F_y$$

$$x_1 = l_1$$

$$\frac{Q(l_1, p)}{v(l_1, p)} = w_1(p) \quad r_1 = \frac{1 - \gamma w_1}{1 + \gamma w_1}$$

$$x_2 = l_2$$

$$\frac{Q(l_2, p)}{v(l_2, p)} = w_2(p) \quad r_2 = \frac{1 - \gamma w_2}{1 + \gamma w_2}$$

$$Y = \frac{1}{m'c} \quad , \quad \gamma = \frac{p}{c} .$$

Dabei ist w_1, w_2 der Abschlußwiderstand und r_1, r_2 der auf die Schnelle bezogene Reflexionsfaktor an den beiden Enden der Saite.

Bei der Rücktransformation von $\frac{1}{w(x,p)}$ kann man zwei Wege beschreiten:

1. $\frac{1}{w(x,p)}$ wird in Teilwellen, die über die Saite laufen, zerlegt;
2. $\frac{1}{w(x,p)}$ wird in Eigenfunktionen entwickelt.

2.2 Berechnung der Lösung durch Synthese der Teilwellen

Die Synthese der Saitenschwingungen aus über die Saite wandernden Teilwellen - der vielleicht physikalisch übersichtlichere Weg - soll zuerst besprochen werden.

Aus der Gleichung (8) erhält man im Unterbereich folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
 v(0,p) = \frac{1}{2} \gamma Q(p) & \left[1 + r_1 e^{-\gamma 2l_1} + r_2 e^{-\gamma 2l_2} \right. \\
 & + 2r_1 r_2 e^{-\gamma 2l} + r_1^2 r_2 e^{-\gamma(2l+2l_1)} + r_1 r_2^2 e^{-\gamma(2l+2l_2)} \\
 & \left. + 2r_1^2 r_2^2 e^{-\gamma 4l} \dots \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

Da uns im wesentlichen nur der Einfluß einer Randbedingung interessiert, wird $r_2 = -1$ und $r_1 = -r$ gesetzt. Die Rücktransformation ergibt dann:

$$\begin{aligned}
 v(0,t) = \frac{1}{2} \gamma \left[Q(t) - \int_{\frac{2l_1}{c}}^t R_1(t-\tau) Q\left(\tau - \frac{2l_1}{c}\right) d\tau - Q\left(\tau - \frac{2l_2}{c}\right) \right. \\
 \left. + 2 \int_{\frac{2l}{c}}^t R_1(t-\tau) Q\left(\tau - \frac{2l}{c}\right) d\tau - \int_{\frac{2l+2l_1}{c}}^t R_2(t-\tau) Q\left(\tau - \frac{2l+2l_1}{c}\right) d\tau \dots \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

mit

$$R_i = \mathcal{L}^{-1}(r^i(p)) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Diese Gleichung (10) ist das Faltungsintegral, Gl.(4), bei bekannter Antwortfunktion in einer anderen Darstellung. Die noch unbekannte Schnelle $v(t)$ und die Kraft $Q(t) = F_y(t)$ in Gleichung (10) müssen zusätzlich die Reibungskennlinie, Gleichung (5), in der Haft- und in der Gleitphase erfüllen.

Man erkennt sofort, daß sich nach jedem Zeitintervall $\frac{2l_1}{c}$, $\frac{2l_2}{c}$, $\frac{2l_1 + 2l_2}{c}$... usw. eine Schnelle-Teilwelle hinzuaddiert. So läßt sich die Lösung zeitlich gestaffelt entwickeln.

In der Zeit

$$0 < t < \frac{2l_1}{c} \quad \text{gilt} \quad v(o,t) = \frac{1}{2} \gamma Q(t)$$

(11)

$$\frac{2l_1}{c} < t < \frac{2l_2}{c} \quad \text{gilt} \quad v(o,t) = \frac{1}{2} \gamma \left[Q(t) - \int_{\frac{2l_1}{c}}^t R_1(t-\tau) Q(\tau - \frac{2l_1}{c}) d\tau \right]$$

usw.

usw.

In jedem Zeitintervall hat man erstens eine Beziehung (Gl. 11) in Form einer Integralverknüpfung zwischen der Schnelle $v(o,t)$ und der Kraft $Q(t)$ an der Anstreichstelle, die gleich der Kraft ist, die an der Anstreichstelle zwischen Bogen und Saite wirkt, und zweitens eine Beziehung zwischen der Kraft und der Schnelle über die nichtlineare Reibungskennlinie. In jedem Zeitintervall hat man also eine nichtlineare Integralgleichung zu lösen. Dieses Lösungsprinzip läßt sich am besten graphisch erläutern (Abb. 17).

Nimmt man zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwindende Anfangsbedingungen ($v(x,t=0)$, $Q(x,t=0) = 0$) an, dieses war hier vorausgesetzt worden, so ergibt sich im ersten Zeitintervall aus dem Schnittpunkt der beiden aufgetragenen Gleichungen in der $Q(t) = F_y(t)/v(o,t)$ -Ebene :

$$v(o,t) = v_B$$

$$Q(t) = F_y(t) = F_1.$$

Die Schnelle und die Kraft ist jetzt in diesem Zeitintervall bekannt. Im zweiten Zeitintervall ist das $Q(\tau - \frac{2l_1}{c})$ gleich dem $Q(t) = F_y(t)$ aus dem ersten Zeitintervall und man hat wieder aus 2 Gleichungen 2 Unbekannte zu bestimmen. Allerdings erhält man hier - je nach $R(t - \tau)$ - einen zeitabhängigen Schnittpunkt: eine Schnittkurve. Nach diesem Prinzip könnte man den ganzen Zeitverlauf auf der Saite sukzessive bestimmen, was allerdings sehr aufwendig ist.

Da uns vor allen Dingen sich ergebende periodische Schwingungen interessieren, nehmen wir an, daß ab einem Zeitpunkt t^* die Saite periodisch schwingt. Die Möglichkeit und die Form dieses periodischen Zeitverlaufs wird geprüft und berechnet.

Wir nehmen noch eine nicht die Allgemeinheit einschränkende Vereinfachung vor. Der Anstreichpunkt l_1 soll zur Saitengesamtlänge l in einem rationalen Verhältnis stehen: $l/l_1 = i$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Dann werden die oben beschriebenen Zeitintervalle alle gleich lang: $2 l_1/c$. Da die folgenden Berechnungen verhältnismäßig umfangreich sind, werden sie an einem konkreten Beispiel $l/l_1 = 4$ erläutert. Die Verallgemeinerung macht dann keine Schwierigkeiten.

Zum Zeitpunkt $t^* = n 2 l_1/c$ soll die Saitenbewegung periodisch mit der Periodendauer T sein. Wir interessieren uns also für den Zeitverlauf bei $t > t^*$ und versuchen Abhängigkeiten der Schnelle und der Kraft von der Zeit $t < t^*$ zu eliminieren. Nimmt man der Einfachheit halber $n = 16$ an, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 16 \frac{2l_1}{c} < t < 17 \frac{2l_1}{c} : v(0, t) = v_{n+1} = v_{17} = \frac{1}{2} Y [Q(t) + \\
 + 2 \int_{16 \frac{2l_1}{c}}^t R_4(t-\tau) Q(\tau - 16 \frac{2l_1}{c}) d\tau - \int_{13 \frac{2l_1}{c}}^t R_4(t-\tau) Q(\tau - 13 \frac{2l_1}{c}) d\tau \\
 - \int_{15 \frac{2l_1}{c}}^t R_3(t-\tau) Q(\tau - 15 \frac{2l_1}{c}) d\tau + 2 \int_{12 \frac{2l_1}{c}}^t R_3(t-\tau) Q(\tau - 12 \frac{2l_1}{c}) d\tau \\
 - \int_{9 \frac{2l_1}{c}}^t R_3(t-\tau) Q(\tau - 9 \frac{2l_1}{c}) d\tau \dots] \quad (12)
 \end{aligned}$$

oder in vereinfachter Schreibweise:

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} = v_{17} = \frac{1}{2} Y [Q_{17} - (R_4^4 Q + R_3^2 Q + R_3^8 Q + \\
 + R_2^6 Q + R_2^{12} Q + R_1^{10} Q + R_1^{16} Q + R_0^{14} Q) + \\
 + 2(R_4^1 Q + R_3^5 Q + R_2^9 Q + R_1^{13} Q)] \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$v_{n+2} = v_{18} = \frac{1}{2} Y [Q_{18} - (R_5^1 Q + R_4^5 Q + R_3^3 Q + R_3^9 Q \dots R_1^{11} Q + R_1^{17} Q + R_0^{15} Q) + 2(R_4^2 Q + R_3^6 Q + R_2^{10} Q + R_1^{14} Q)]$$

$$v_{n+3} = v_{19} = \frac{1}{2} Y [Q_{19} - (R_5^2 Q + R_4^6 Q + R_3^4 Q + R_3^{10} Q \dots R_1^{12} Q + R_1^{18} Q + R_0^{16} Q) + 2(R_4^3 Q + R_3^7 Q + R_2^{11} Q + R_1^{15} Q)]$$

$$v_{n+4} = v_{20} = \frac{1}{2} Y [Q_{20} - (R_5^3 Q + R_4^7 Q + R_4^7 Q \dots R_1^{13} Q + R_1^{19} Q + R_0^{17} Q) + 2(R_4^4 Q + R_3^8 Q + R_2^{12} Q + R_1^{16} Q)]$$

$$v_{n+5} = v_{21} = \frac{1}{2} Y [Q_{21} - (R_5^4 Q + R_4^8 Q + R_4^8 Q \dots R_1^{14} Q + R_1^{20} Q + R_0^{18} Q) + 2(R_5^1 Q + R_4^5 Q + R_3^9 Q + R_2^{13} Q + R_1^{17} Q)]$$

wobei

$$R_i^j Q = \int_{(k-j)\frac{2e_1}{c}}^t R_i(t-\tau) Q(\tau - (k-j)\frac{2e_1}{c}) d\tau, \quad \frac{2e_1}{c}(k-1) < t < \frac{2e_1}{c}k$$

$i, j = 0, 1, 2, 3 \dots$
 $k = n + 1, n + 2, n + 3 \dots$

Man versucht jetzt die Schnelle v und Kraft Q , die nicht periodisch sind - also $v(t)$ und $Q(t)$ für $t < t^*$ - zu eliminieren. Das ist bei einem allgemeinen $R(t) = \mathcal{L}^{-1}(\tau(p))$ schwierig, bei einem konstanten Reflexionsfaktor

$$R(t) = f(t) r = \mathcal{L}^{-1}(r \neq r(p))$$

aber leicht möglich.

Es ergeben sich dann folgende Gleichungen für die einzelnen Zeitintervalle

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_{17} = Q_{17} + S_1 \\ v_{n+2} &= v_{18} = Q_{18} + S_2 - r Q_{17} \\ v_{n+3} &= v_{19} = Q_{19} + S_3 - r Q_{18} \\ v_{n+4} &= v_{20} = Q_{20} + S_4 - r Q_{19} - Q_{17} \\ v_{n+5} &= v_{21} = Q_{21} + r S_1 - r Q_{20} - Q_{18} + 2 r Q_{17} \\ v_{n+6} &= v_{22} = Q_{22} + r S_2 - r Q_{21} - Q_{19} + 2 r Q_{18} - r^2 Q_{17} \end{aligned}$$

$$v_n + 7 = v_{23} = Q_{23} + r S_3 - r Q_{22} - Q_{20} + 2 r Q_{19} - r^2 Q_{18}$$

$$v_n + 8 = v_{24} = Q_{24} + r S_4 - r Q_{23} - Q_{21} + 2 r Q_{20} - r^2 Q_{19} - r Q_{17}$$

Die Summanden S_i , dessen Wert sofort aus dem Vergleich der Gleichungen (14) und (13) folgt, lassen sich eliminieren und man erhält:

$$\begin{aligned} v_{21} - r v_{17} &= Q_{21} + r Q_{17} - r Q_{20} - Q_{18} \\ v_{22} - r v_{18} &= Q_{22} + r Q_{18} - r Q_{21} - Q_{19} \\ v_{23} - r v_{19} &= Q_{23} + r Q_{19} - r Q_{22} - Q_{20} \\ v_{24} - r v_{20} &= Q_{24} + r Q_{20} - r Q_{23} - Q_{21} \end{aligned} \quad (15)$$

mit

$$\begin{aligned} v_j &= v \left(t - (k-j) \frac{2\ell_1}{c} \right) & j &= 1, 2, 3 \dots \\ & & & (k-1) \frac{2\ell_1}{c} < t < \frac{2\ell_1}{c} \\ Q_j &= Q \left(t - (k-j) \frac{2\ell_1}{c} \right) & k &= n+1, n+2, n+3 \dots \end{aligned}$$

Man hat hier tatsächlich nur Größen, die von der Zeit $t > t^*$ abhängen. Die periodischen Bedingungen für die Schnelle und die Neigung bei $T = 2 \ell_1 / c$ und $l/l_1 = 4$ lauten:

$$v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + v_{n+4} = 0$$

$$v_n = v_{n+4}$$

$$Q_n = Q_{n+4}$$

bei

$$t > t^* = n \frac{2\ell_1}{c}$$

Die Gleichungen für periodische Bewegung ergeben sich dann zu:

$$v_{17} \cdot (1 - r) = Q_{17} (1 + r) - r Q_{20} - Q_{18}$$

$$v_{18} \cdot (1 - r) = Q_{18} (1 + r) - r Q_{21} - Q_{19}$$

$$v_{19} \cdot (1 - r) = Q_{19} (1 + r) - r Q_{22} - Q_{20}$$

$$v_{20} \cdot (1 - r) = Q_{20} (1 + r) - r Q_{23} - Q_{21}$$

Die Koeffizientendeterminante bei vorgegebener Schnelle und bei gesuchter Kraft $Q_{17}, Q_{18}, Q_{19}, Q_{20}$ verschwindet. Es werden deswegen die Kraftdifferenzen $(Q_{17} - Q_{18}), (Q_{18} - Q_{19}),$

$(Q_{19} - Q_{20})$, $(Q_{20} - Q_{17})$ als Unbekannte definiert und man erhält dann als Koeffizientendeterminante den Wert $1 - r^4$. Die Lösung ergibt

$$\begin{aligned}
 Q_{17} - Q_{18} &= \frac{1}{(1+r)^2} [v_{17} + r v_{18} + r^2 v_{19} + r^3 v_{19}] \\
 Q_{18} - Q_{19} &= \frac{1}{(1+r)^2} [v_{18} + r v_{17} + r^2 v_{20} + r^3 v_{19}] \\
 Q_{19} - Q_{20} &= \frac{1}{(1+r)^2} [v_{19} + r v_{18} + r^2 v_{17} + r^3 v_{20}] \\
 Q_{20} - Q_{17} &= \frac{1}{(1+r)^2} [v_{20} + r v_{19} + r^2 v_{18} + r^3 v_{17}]
 \end{aligned} \tag{18}$$

Löst man das Gleichungssystem (18) unter Berücksichtigung der Reibungskennlinie, erhält man für die Schnelle den Helmholtztyp. (Abb. 1 und 18.)

$$v_{17} = v_{18} = v_{19} = v_B, \quad v_{20} = -3 v_B,$$

und für die Kraftdifferenzen

$$\begin{aligned}
 Q_{17} - Q_{18} &= F_{y17} - F_{y18} = \frac{v_B}{(1+r)^2} [1 - 3r + r^2 + r^3] \\
 Q_{18} - Q_{19} &= F_{y18} - F_{y19} = \frac{v_B}{(1+r)^2} [1 + r - 3r^2 + r^3] \\
 Q_{19} - Q_{20} &= F_{y19} - F_{y20} = \frac{v_B}{(1+r)^2} [1 + r + r^2 - 3r^3] \\
 Q_{20} - Q_{17} &= F_{y20} - F_{y17} = \frac{v_B}{(1+r)^2} [-3 + r + r^2 + r^3]
 \end{aligned} \tag{19}$$

Nimmt man $r = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) an, so erhält man die auch schon von RAMAN /2/ unter etwas anderen Voraussetzungen errechneten Stufenkräfte (Abb. 18):

$$\begin{aligned}
 F_{17} - F_{18} &= -v_B \frac{\varepsilon}{2} \\
 F_{18} - F_{19} &= +v_B \frac{\varepsilon}{2} \\
 F_{19} - F_{20} &= +v_B \frac{3}{2} \varepsilon \\
 F_{20} - F_{17} &= -v_B \frac{3}{2} \varepsilon
 \end{aligned} \tag{20}$$

Ermittelt man die maximalen und minimalen Bogenkräfte $F_z \max$

und $F_z \min$, so erhält man für $F_z \max$ den von CREMER /11/ angegebenen Wert $2 m' c \Delta v$. Die minimale Bogenkraft bei $r = 1 - \varepsilon$ wird

$$F_z \min = \frac{1}{\mu_{k \max} - \mu_G} 2 v_B \frac{F_x m'}{w_1} \frac{\ell}{e_1} \quad (21)$$

Diese Gleichung beschreibt schon im Prinzip die richtige Tendenz: Der notwendige minimale "Bogendruck" steigt bei höherer Bogengeschwindigkeit, desto näher man am Steg ansteicht und desto dicker die Saite ist. Allerdings ist die Abhängigkeit vor allen Dingen von dem Verhältnis l/l_1 noch nicht befriedigend, denn am Steg benötigt man sicher eine größere minimale Bogenkraft als diese Gleichung angibt, da, wie die Messungen zeigen (Abb. 14), der minimale "Bogendruck" zum Steg hin stärker als nur mit $1/l_1$ ansteigt. Da sich diese Lösung bei Annahme eines frequenzunabhängigen Reflexionsfaktors aus einer Folge von Diskontinuitäten aufbaut, braucht die Reibungskennlinie nur an gewissen Punkten erfüllt zu sein. So geschieht der Übergang von der Haftphase zur konstanten Gleitgeschwindigkeit in der Gleitphase in unendlich kurzer Zeit; eine kontinuierlich von der Relativgeschwindigkeit abhängende Gleitreibungskraft kann so nicht berücksichtigt werden. Bei der Annahme eines frequenzunabhängigen Reflexionsfaktors kann man nur einen minimalen Bogendruck angeben. Einen Einfluß des Bogendruckes auf die Dauer der Gleitphase, wie er in Abb. 7, 8 erkennbar ist, ist unter diesen Voraussetzungen nicht erklärbar.

Die periodischen Schwingungen der Saite wurden hier, ausgehend von verschwindenden Anfangsbedingungen, entwickelt. Auf die Erweiterung dieser Berechnungsmethode bei Annahme einer bekannten Anfangsbedingung soll hier nicht eingegangen werden, da Rechnungen sehr umfangreich sind und in jedem Fall auf das gleiche Ergebnis (Gl.(17), (19)) führten.

Es wäre wünschenswert, mit dieser beschriebenen Methode auch periodische Schwingungen bei Annahme eines komplexen

Abschlußwiderstandes an einem Ende berechnen zu können. Die bisher bei einem reellen Abschlußwiderstand $r \neq r(p)$ vorausgesetzte Periodendauer $T = \frac{2l}{c}$, wäre bei einem komplexen Abschlußwiderstand $r = r(p)$ unbekannt und außerdem ließe sich diese Periodendauer nicht in äquidistante Teile $2l_1/c$ zerlegen.

Aus diesem Grunde ist eine Synthese aus Teilwellen zu einer periodischen Schwingung sehr unübersichtlich und aufwendig.

Die Ergebnisse von KELLER /12/ und FRIEDLANDER /13/ lassen sich aus Gleichung (13) nur für $r = 1$ leicht verifizieren.

2.3 Berechnung der Lösung durch Synthese der Eigenfunktionen.

Es wird im folgenden versucht, eine periodische Lösung bei $t \rightarrow \infty$ (stationärer Zustand) zu finden, indem man die Antwortfunktion $A(x, t)$ durch die Entwicklung des Eingangswertes $\frac{1}{w(x, p)}$ in Eigenfunktionen erhält. Dabei wird die Bogenkraft $F_y(t) = Q(t)$ periodisch vorausgesetzt:

$$F_y(t) = F_y(t + T).$$

Der Übersichtlichkeit halber werden hier die ganzen Rechnungen zur Rücktransformation von $\frac{1}{w(x, p)}$ weggelassen und nur das allgemeine Ergebnis angegeben:

$$v(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{w(x, p)} F_y(p) \right) = \int_0^t A(x, t-\tau) F_y(\tau) d\tau$$

mit der Antwortfunktion eines Diracimpulses

$$A(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{w(x, p)} \right) ;$$

bei einer periodischen Kraft

$$v(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{w(x, p)} \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}} \right) = \int_0^t A_T(x, t-\tau) F_T(\tau) d\tau$$

mit der Antwortfunktion eines periodischen Diracimpulses

$$A_T(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{w(x, p)} \frac{1}{1 - e^{-pT}} \right) ;$$

im stationären Zustand ($t \rightarrow \infty$)

$$v(x,t) = \int_0^T A_{T\infty}(x,t-\tau) F_T(\tau) d\tau \quad (22)$$

mit der Antwortfunktion eines periodischen Diracimpulses bei $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} A_{T\infty}(x,t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} A_T(x,t) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w(x,p_n)} \frac{1}{p_n T} e^{p_n t} \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$\frac{1}{w(x,p_n)} = Y \frac{\sinh \frac{p_n}{c} (l_2 - x) (\sinh \frac{p_n}{c} l_1 + \frac{1}{Y W_1} \cosh \frac{p_n}{c} l_1)}{\sinh \frac{p_n}{c} l_2 + \frac{1}{Y W_1} \cosh \frac{p_n}{c} l_2} \quad x = x_2 \quad (23)$$

$$\frac{1}{w(x,p_n)} = Y \frac{\sinh \frac{p_n}{c} l_2 (\sinh \frac{p_n}{c} (l_1 - x) + \frac{1}{Y W_1} \cosh \frac{p_n}{c} (l_1 - x))}{\sinh \frac{p_n}{c} l_2 + \frac{1}{Y W_1} \cosh \frac{p_n}{c} l_2} \quad x = x_1$$

$$W_2 \rightarrow \infty, \quad p_n = j \frac{2n\pi}{T}$$

$$W_1 = W$$

$$F_Y(t) = F_Y(t+T), \quad F_T = \begin{cases} F_Y(t) & 0 < t < T \\ 0 & T < t \end{cases}$$

Auf die Berechnung bei einem rein reellen Abschlußwiderstand soll hier nicht weiter eingegangen werden, es ergeben sich die gleichen Resultate wie im vorherigen Abschnitt.

Über den komplexen Abschlußwiderstand $w = w' + jw''$ wird vorerst nur angenommen, daß er groß gegenüber der Kennimpedanz $\frac{1}{Y}$ der Saite ist:

$$|wY| \gg 1 \quad (24)$$

Die Periodendauer T des einschwingenden Zustandes der schwingenden Saite ist beim Abschluß der Saite durch einen komplexen Widerstand vorerst noch unbekannt. Gilt jedoch Bedingung (24) wird sich die Periodendauer T sicher nicht sehr von der Periodendauer $T_0 = \frac{2l}{c}$ der idealen Saite unterscheiden; man wird ansetzen können: $T = T_0 + \Delta T$. Die Erfahrung zeigt außerdem, daß die Grundfrequenz der gezupften Saite gleich der gestrichenen Saite ist, d.h. es ist

$$\frac{2}{T} \pi = \omega_1,$$

wobei ω_1 der erste Eigenwert ($n = 1$) der Eigenwertgleichung

der Saite mit dem entsprechenden Abschlußwiderstand ist

$$-Y w(p) \operatorname{tgh} p \frac{\ell}{c} = 1, \quad p = -\delta_n + j\omega_n \quad (25)$$

Durch Entwicklung der Eigenwertgleichung in einer TAYLOR-Reihe und mit Bedingung (24) erhält man mit $p_0 = j \frac{2n\pi}{T_0}$ und $\Delta p = (-\delta_n + j\Delta\omega_n)$

$$-Y w(p_0) \Delta p = 1 \quad (26)$$

Dann ergibt sich für die Dämpfungskonstante δ_n und die Abweichung von der Eigenfrequenz der fest eingespannten idealen Saite $\Delta\omega_n$:

$$\frac{\ell}{c} \delta_n = \frac{w'}{|w|^2} \frac{1}{Y} \quad (27)$$

$$\frac{\ell}{c} \Delta\omega_n = \frac{w''}{|w|^2} \frac{1}{Y}$$

Die Abweichung von der Periodendauer der idealen Saite läßt sich dann sofort angeben mit $n = 1$

$$\frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{\Delta\omega_1}{\omega_{01}}$$

Unter diesen Bedingungen und $p_n = -\delta_n + j \frac{2\pi n}{T}$ verschwindet der Imaginärteil des Nenners der Eigenwertgleichung in erster Näherung. Der Eingangsleitwert wird dann

$$\frac{1}{w(x, p_n)} = (-1)^n Y \sin \frac{n\pi}{\ell} (\ell_2 - x) \left[\frac{|w|^2}{w'} Y \sin \frac{n\pi}{\ell} e_1 + j(1 - j \frac{w''}{w'}) \cos \frac{n\pi}{\ell} e_1 \right] \quad x = x_2$$

$$\frac{1}{w(x, p_n)} = (-1)^n Y \sin \frac{n\pi}{\ell} e_2 \left[-\frac{|w|^2}{w'} Y \sin \frac{n\pi}{\ell} (\ell_1 - x) + j(1 - j \frac{w''}{w'}) \cos \frac{n\pi}{\ell} (\ell_1 - x) \right] \quad x = x_1 \quad (28)$$

Unter der Bedingung

$$w'' \gg w' \quad (29)$$

erhält man folgende Gleichung für den Eingangsleitwert

$$\frac{1}{w(x, p_n)} = Y \frac{1}{\frac{\ell}{c} \delta_n} \sin \frac{n\pi}{\ell} (\ell_1 + x) \left[\sin \frac{n\pi}{\ell} e_1 - \frac{\ell}{c} \Delta\omega_n \cos \frac{n\pi}{\ell} e_1 \right] \quad x = x_2 \quad (30)$$

$$\frac{1}{w(x, p_n)} = Y \frac{1}{\frac{\ell}{c} \delta_n} \sin \frac{n\pi}{\ell} e_1 \left[\sin \frac{n\pi}{\ell} (\ell_1 - x) - \frac{\ell}{c} \Delta\omega_n \cos \frac{n\pi}{\ell} (\ell_1 + x) \right] \quad x = x_1$$

Die in Gleichung (27) angegebene Abweichung von der Eigenfrequenz der fest eingespannten Saite ist sicher verschwindend klein, so erhält man mit folgender Annahme

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{1}{w'' y_n \pi} \ll \frac{e_1}{e} \quad (31)$$

eine sehr einfache Gleichung für den Eingangswiderstand an der Anstreichstelle ($x = 0$):

$$\frac{1}{w(0, p_n)} = Y \frac{1}{\frac{e}{c} d_n} \sin^2 \frac{n\pi}{e} e_1 \quad (32)$$

Die sich hieraus ergebende Antwortfunktion lautet:

$$A_{T\infty}(0, t-\tau) = \frac{d}{dt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p_n T} \frac{1}{\frac{e}{c} d_n} \sin^2 \frac{n\pi}{e} e_1 e^{p_n(t-\tau)} \quad (33)$$

Diese Antwortfunktion, eingesetzt in das Faltungsintegral (Gl. 22) unter Berücksichtigung der Gleichungen (5), (6), muß dann eine Lösung ergeben. Allerdings muß vorher der komplexe Abschlußwiderstand bzw. der Eingangswiderstand des Geigenkörpers mit aufgesetztem Steg angegeben werden.

Messungen über den Eingangswiderstand von Streichinstrumentenkörpern liegen von EGGERS /14/ und REINICKE /10/ vor. Einige Messungen von REINICKE sind in Abb. 19 angegeben.

Es scheint aussichtslos, ein einfaches Modell für den Eingangswiderstand des Geigenkörpers angeben zu können, dessen Betrag auch nur etwa dem des in Abb. 19 angegebenen entspricht. Wie auch Phasenmessungen von Herrn REINICKE /10/ zeigen, wirkt der Eingangswiderstand - bei niedrigen Frequenzen beginnend, zuerst als Steife bis zur 1. Hohlraumresonanz, dann als Masse und wieder als Steife bis zur 1. Hauptresonanz usw. In Abb. 20 ist ein Versuch für ein Modell des Eingangswiderstandes dargestellt. Auch SCHELLENG /15/ hat den Eingangswiderstand des Geigenkörpers ähnlich betrachtet.

Für die folgenden Berechnungen wurde als einfachster, frequenzabhängiger Abschlußwiderstand eine Parallelschaltung aus einer Steife und einem reellen Widerstand angenommen. Selbstverständlich kann dieser einfache Abschlußwiderstand nicht als eine Realisierung einer Eingangsimpedanz eines Geigenkörpers angesehen werden. Unser Berechnungsmodell stimmt mit einem Streichinstrument nur insofern überein, daß eine Saite angestrichen wird und die Verluste entscheidend durch den Abschlußwiderstand an einem Ende der Saite bestimmt sind. Es wird auch im folgenden nur versucht, die gestrichene Saite und nicht ein vollständiges Streichinstrument durch eine dynamische Theorie zu schreiben.

Bei der Annahme einer Parallelschaltung aus einer Steife und einem reellen Widerstand, und unter Berücksichtigung von Gleichung (24) und (29), ergibt sich eine Dämpfungskonstante von

$$\sigma_n = \frac{\rho}{c} \frac{1}{Y} \frac{W'}{\left(s/\frac{2n\pi}{T}\right)^2} \quad (34)$$

Die Antwortfunktion Gl. (33) ist unter Berücksichtigung von Gl. (34) unten in Abb. 22 dargestellt. Die Differentiation in Gl. (22) konnte hier ausgeführt werden, da die Reihe bei der angenommenen Dämpfungskonstante Gl. (34) konvergiert.

Es gibt die Möglichkeit, eine Lösung für die angegebenen Gleichungen (5), (6), (22), (33) im Zeitbereich oder im Frequenzbereich zu finden. Im wesentlichen wird hier die Lösung im Frequenzbereich vorgenommen, wobei ein sinnvoller Ansatz für die Schnelle benutzt wird. Die Darstellung im Zeitbereich soll nur die Lösung veranschaulichen. Bei der Lösung im Frequenzbereich ergibt sich dann durch den Ansatz einer Fourierreihe

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(x) e^{j\omega_n t} \\ F_y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega_n t} \end{aligned} \quad (35)$$

aus dem Faltungsintegral Gl. (22), indem man sich die Schnelle und die Kraft im ganzen Zeitbereich als periodisch fortgesetzt denkt; die bekannte Gleichung:

$$V_n(x) = \frac{1}{w(x, j\omega_n)} F_n \quad (36)$$

Da die Kraft nur von der Zeit abhängt, ist die Abhängigkeit der Schnelle $v(x,t)$ von dem Ort x durch die

Ortsabhängigkeit der Antwortfunktion $A(x, t)$ bzw. des Eingangsleitwertes $\frac{1}{W(x, \rho)}$ vorgegeben. Für die Lösung wird deswegen ein Trapezansatz für die Schnelle gewählt (Abb. 21). Die von der Beobachtungsstelle x abhängende minimale Gleitphasendauer $t_- = t_-(x)$ wird aus Gleichung (28) und (36) bestimmt

$$V_n(x, j\omega_n) = - \frac{\Delta v}{\omega_n^2 t_{\ddot{u}}} \sin \omega_n \frac{t_{\ddot{u}}}{2} \sin \omega_n \frac{t_-(x)}{2} =$$

$$F_n \gamma \frac{1}{e} \delta_n \sin \frac{n\pi}{e} (l_1 + x) \sin \frac{n\pi}{e} l_1 \quad x = x_2 \quad (37)$$

Es ergibt sich

$$\frac{t_-}{T} = \frac{l_1 + x_2}{e} \quad (38)$$

Für $x = x_1$ erhält man folgende Gleichung

$$V_n(x_1, j\omega_n) = - \frac{\Delta v}{\omega_n^2 t_{\ddot{u}}} \sin \omega_n \frac{t_{\ddot{u}}}{2} \sin \omega_n \frac{t_-(x)}{2} =$$

$$F_n \gamma \frac{1}{e} \delta_n \sin \frac{n\pi}{e} l_1 \left(\sin \frac{n\pi}{e} (l_1 - x) - \frac{1}{e} \cos \frac{n\pi}{e} (l_1 - x) \right) \quad (39)$$

Diese Bedingung ist nur näherungsweise erfüllbar, wobei zusätzlich noch der Schnellesprung Δv als eine ortsabhängige Größe $\Delta v = \Delta v(x)$ angenommen werden muß. Das stimmt mit der Beobachtung überein, daß beim Anstreichen einer Saite in Stegnähe, die Schnelleamplitude von der Anstreichstelle zum Steg hin abnimmt.

Wir werden uns jetzt mit den Bedingungen direkt an der Anstreichstelle befassen. Der Einfachheit halber soll die Saite in der Nähe des Steges angestrichen werden, d.h. es soll gelten:

$$\frac{n\pi l_1}{e} \ll 1 \quad (40)$$

Der Kraftverlauf in der Gleitphase ergibt sich bei Annahme eines bestimmten Schnelleverlaufes zwangsläufig. Die Reibungskennlinie in der Gleitphase wurde dabei durch eine Exponentialfunktion approximiert

$$F_R = \hat{F} e^{\beta(v(t) - v_B)} + F_{G_0}, \quad v < v_B \quad (41)$$

Aus Gleichung (32) erkennt man unter Berücksichtigung der Gleichung (34) sofort, daß beim Anstreichen der Saite sehr nahe am Steg ($l_1/l \ll 1$) unter Beibehaltung der Bedingung (31), der Eingangswiderstand der Saite $w(0, j\omega_n)$ frequenzunabhängig wird. Unabhängig davon, ob dieser Fall praktisch erreichbar ist, zeigt doch dieser Grenzfall, daß beim Anstreichen der Saite in Stegnähe der Zeitverlauf der Kraft und der Schnelle sehr ähnlich sein müssen. Deswegen wird in der Haftphase die Kraft als konstant angenommen.

Es ergibt sich dann folgende Gleichung für die Anstreichsstelle

$$\begin{aligned} & - \frac{\Delta v l}{\omega_n t_{\ddot{u}}} \sin \omega_n \frac{t_{\ddot{u}}}{2} \sin \omega_n \frac{t_{\ddot{u}}}{2} = \\ & = \gamma \frac{1}{\frac{e}{c} \delta_n} \sin^2 \frac{n\pi}{e} e_{\lambda} \left[-F_H \frac{\sin \omega_n \frac{t_G}{2}}{\omega_n} + \hat{F} \frac{\frac{\beta \Delta v}{t_{\ddot{u}}} \cos \omega_n \frac{t_G}{2} + \omega_n \sin \omega_n \frac{t_G}{2}}{\left(\frac{\beta \Delta v}{t_{\ddot{u}}}\right)^2 + \omega_n^2} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

Dabei war eine steil abfallende Reibungskennlinie angenommen worden:

$$\beta \Delta v \gg 1 \quad (43)$$

Da der Abstand des Anstreichortes vom Steg als klein angenommen wurde, gilt dieses auch für die Gleitphasendauer t_G , die minimale Gleitphasendauer $t_{\ddot{u}}$ und für die Übergangszeit $t_{\ddot{u}}$. Ersetzt man in Gleichung (42) den $\sin x$ durch sein Argument x , so wird der Eingangswiderstand $w(0, j\omega_n)$ frequenzunabhängig, wie auch v_n und F_n . Da diese erste Näherung unbrauchbar ist, benutzen wir eine weitere Näherung für trigonometrischen Funktionen

$$\sin x \approx x \left(1 - \frac{x^2}{6}\right), \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \quad (44)$$

Man erhält dann 2 Gleichungen

$$\Delta v \frac{t_-}{2} = \gamma \frac{1}{\frac{e}{c} d_1} \left(\frac{\pi e_1}{e} \right)^2 \left[\overline{F}_H \frac{t_G}{2} - \hat{F} \frac{t_{\ddot{u}}}{\beta \Delta v} \right]$$

$$\Delta v \frac{t_-}{2} \frac{\omega_1^2}{24} (t_-^2 + t_{\ddot{u}}^2) n^2 = \quad (45)$$

$$\gamma \frac{1}{\frac{e}{c} d_1} \left(\frac{\pi e_1}{e} \right)^2 n^2 \left\{ \left(\frac{\pi e_1}{e} \right)^2 \frac{1}{3} \left(\overline{F}_H \frac{t_G}{2} - \hat{F} \frac{t_{\ddot{u}}}{\beta \Delta v} \right) + \overline{F}_H \frac{t_G}{2} \left(\omega_1 \frac{t_G}{2} \right)^2 \frac{1}{6} \right. \\ \left. + \left[- \left(\omega_1 \frac{t_G}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{t_{\ddot{u}}}{\beta \Delta v} - \left(\omega_1 \frac{t_{\ddot{u}}}{\beta \Delta v} \right)^2 \frac{t_{\ddot{u}}}{\beta \Delta v} + \left(\omega_1 \frac{t_{\ddot{u}}}{\beta \Delta v} \right)^2 \frac{t_G}{2} \right] \right\}$$

aus denen sich die beiden Kraftamplituden \overline{F}_H , \hat{F} unter Berücksichtigung von Gleichung (38), (43) ergeben:

$$\hat{F} = \frac{\Delta v^2 \beta}{2 \gamma} \left(\frac{e}{\pi e_1} \right)^2 d_1 \frac{e}{c} \frac{1}{\frac{t_{\ddot{u}}}{t_-} \left(\frac{t_{\ddot{u}}}{t_-} + 1 \right)} \quad (46)$$

$$\frac{\overline{F}_H}{\hat{F}} = \frac{t_{\ddot{u}}}{t_- \beta \Delta v} \cdot \frac{2 + 3 \frac{t_{\ddot{u}}}{t_-} + \left(\frac{t_{\ddot{u}}}{t_-} \right)^2}{\left(1 + \frac{t_{\ddot{u}}}{t_-} \right)^2} = \frac{t_{\ddot{u}}}{t_-} \frac{2}{\beta \Delta v} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{t_{\ddot{u}}}{t_-}} \right)$$

Es wird jetzt noch kurz die erhaltene Lösung im Zeitbereich an Hand der Abb. 22 diskutiert. Der gesamte Kraftverlauf $F_y(\tau)$ muß multipliziert mit der Antwortfunktion $A(0, t-\tau)$ und integriert über eine Periode in jedem Zeitpunkt t den Wert, der Schnelle $v(t)$ ergeben. Andererseits muß die Kraft $F_y(t)$ und die Schnelle $v(t)$ zusammen die Reibungskennlinie

$$F_y(t) = F_R (v(t) - v_B)$$

erfüllen. Zusätzlich muß das Integral über die Schnelle in einer Periode verschwinden, das ist der Fall, wenn

$$\Delta v = \frac{v_B T}{t_-} \quad , \quad \text{bei} \quad \frac{t_-}{T} = \frac{e_1}{e} \quad (47)$$

Die Abbildung ist wegen der Übersichtlichkeit für $l_1/l = 1/4$ gezeichnet, obwohl für diesen Wert die vorangegangenen Berechnungen nicht mehr gelten, Bedingung (40) ist nicht mehr erfüllt. In Abb. 23 sind schematisch der Zeitverlauf der Schnelle und der Kraft für 2 verschiedene Bogenkräfte skizziert. Bei der kleineren Bogenkraft muß die Übergangszeit $t_{\ddot{u}}$ und damit auch die Gleitphasendauer

t_G größer sein als bei einer größeren Bogenandruckkraft, um Gleichung (46) zu erfüllen.

In Abb. 24 ist bei zwei verschiedenen Bogenandruckkräften das Ergebnis des Faltungsintegrals (Gl. 22) mit der Antwortfunktion (Gl. 33 und Gl. 34) v_1 dargestellt und wird mit dem benutzten Ansatz für die Schnelle v_0 verglichen. Die Kraft $F_T = F_y$ ist wie beschrieben, in der Haftphase konstant und in der Gleitphase durch die entsprechend im Ansatz angenommene Schnelle und Gl. (41) bestimmt. Hier wurden die im nachfolgenden beschriebenen Modell vorhandenen Werte für Reibungskennlinie benutzt.

Der minimale Bogendruck ergibt sich beim maximalen Wert der Übergangszeit $\frac{t_{ü}}{T} = \frac{t_-}{T} = l_1/l$ aus Gleichung (5) und (46):

$$\begin{aligned} F_{z \min} &= \frac{1}{\mu_H - \mu_G} \frac{\hat{F}}{T} = \frac{1}{\mu_H - \mu_G} \frac{\beta \Delta v^2}{\pi^2 \gamma \delta} d_1 T \left(\frac{e}{e_1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\mu_H - \mu_G} \frac{\beta v_B^2}{\pi^2 \gamma \delta} d_1 T \left(\frac{e}{e_1}\right)^4 \end{aligned} \quad (48)$$

Neben diesen Überlegungen wurde von HEINRICH /16/ und BURCHARD /17/ ein elektro-mechanisches Modell der gestrichenen Saite erstellt (Abb. 25). Die Saite blieb als schwingendes Medium erhalten. Nur die Selbsterregung der Saite wurde elektronisch nachgebildet. Die Saite wurde elektrodynamisch erregt. An der "Anstreichstelle" der Saite schwingt die Saite in einem Magnetfeld eines Dauermagneten, durch die Saite selbst fließt ein Strom; die entstehende Kraft erhält die Schwingungen der Saite aufrecht. Gleichzeitig wird an der "Anstreichstelle" die Auslenkung mit einer Photozelle gemessen, differenziert erhält man eine Spannung, die proportional die Schnelle an der "Anstreichstelle" ist. Diese der Schnelle proportionale Spannung wird auf eine elektronisch nachgebildete Reibungskennlinie gegeben. Der über diese Reibungskennlinie entstehende Strom wird auf die Saite gegeben und erzeugt an der "Anstreichstelle" eine ihm proportionale Kraft. Damit ist die an der

"Anstreichstelle" vorhandene Kraft F_y und die Schnelle über eine Reibungskennlinie verkoppelt.

Der Vorteil des elektromechanischen Analogon liegt darin, daß die Kraft F_y als Strom und die Schnelle v als Spannung leicht sichtbar ist.

Allerdings weicht der Schnelleverlauf an dem Analogon etwas von der Schnelle an wirklich angestrichenen Saiten ab. Das hat wahrscheinlich zwei Ursachen. Erstens konnte die Reibungskennlinie nicht exakt nachgebildet werden; vor allen Dingen ist in der Haftphase die Kraft nicht völlig unabhängig von der Schnelle. Zweitens fehlt die materielle Bindung zwischen Bogen und Saite, so daß im Analogon die Saite auch in der z -Richtung schwingen kann.

An diesem Analogon wurde der Kraft- und Schnelleverlauf an der "Anstreichstelle" bei einem vorher beschriebenen komplexen Abschlußwiderstand der Saite nachgeprüft. An einem Ende der Saite wurde ein komplexer Widerstand, bestehend aus einer Steife und einem Realteil, realisiert. Er bestand aus einer kurzen, quergespannten Saite, die durch Schaumstoff bedämpft war. Der Abschlußwiderstand wurde durch die Ausmessung der stehenden Wellen auf der Saite gemessen. Das Ergebnis ist im Smith-Diagramm (Abb. 26) dargestellt.

Auf diesem Analogon wurde der minimale Bogendruck in Abhängigkeit von der "Anstreichstelle" gemessen. Die Ergebnisse und der Vergleich mit der Formel (48) ist in Abb. 27 dargestellt. Dabei war der Schnellesprung $\Delta v = 60 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ konstant. Die Kennimpedanz der Saite war $\frac{1}{y} = 0,5 \frac{\text{ps}}{\text{cm}}$, die Grundfrequenz der Saite $\frac{1}{T} = 110 \text{ Hz}$. Die Reibungskennlinie hatte folgende Parameter $\beta = \frac{1}{10} \frac{\text{s}}{\text{cm}}$, $\mu_H - \mu_G = \frac{1}{2}$. Die Dämpfungskonstante δ_1 für die Grundfrequenz wurde einmal aus dem Abschlußwiderstand (Gleichung (27)) und zum anderen aus der Messung der Abklingzeit bestimmt. Es ergab sich in beiden Fällen etwa der gleiche Wert $\delta_1 = 0,6 \text{ s}$. Der minimale Bogendruck ist dann

$$F_{zmin} = 0,03 \left(\frac{1}{I_1}\right)^2. \quad (50).$$

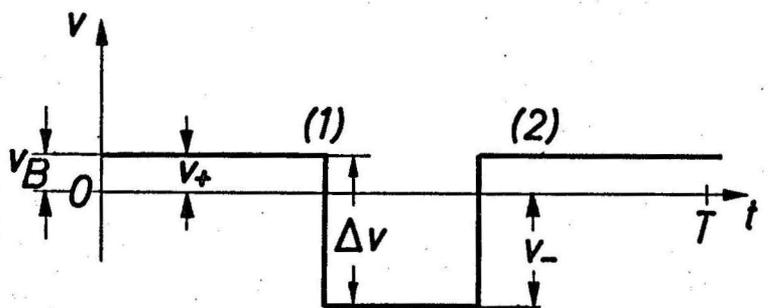
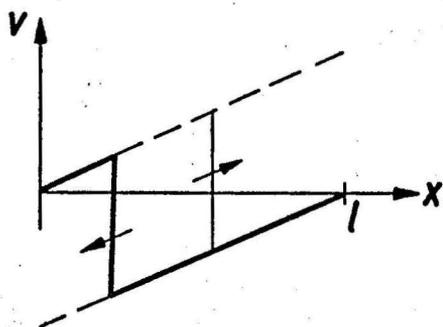
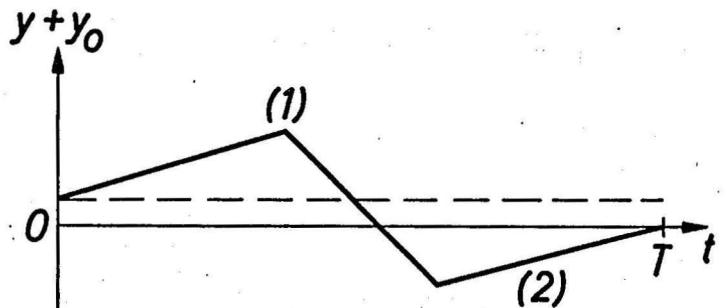
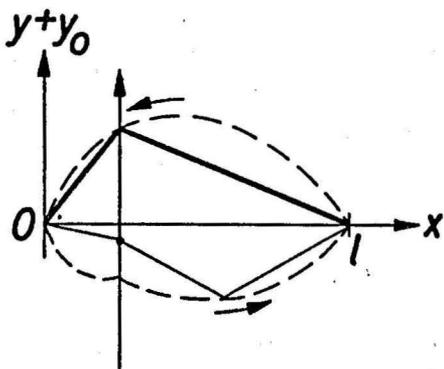
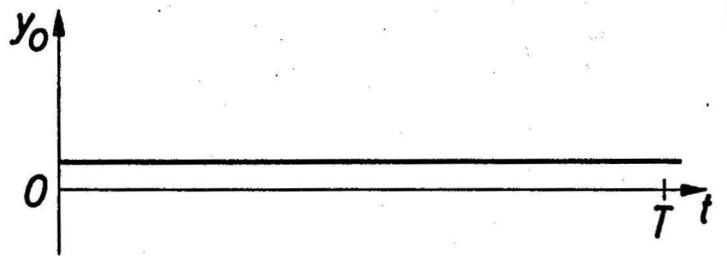
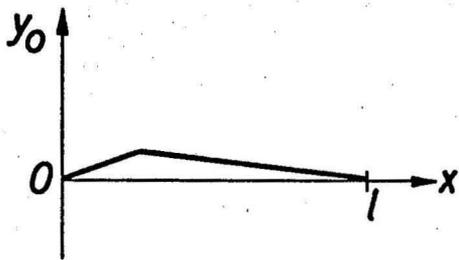
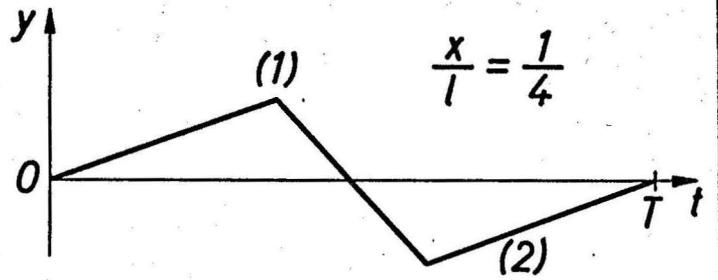
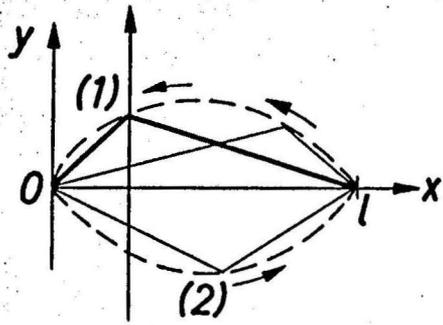
Der gemessene Bogendruck ist gegenüber dem berechneten etwa um den Faktor 2 zu klein. Das kann einmal daran liegen, daß die Bestimmung der genauen Grenze für das Abreißen der Schwingung unzuverlässig ist. Zum anderen ist es möglich, daß die maximale Übergangszeit kleiner als der angenommene Wert ist:

$$t_{ümax} < t_-.$$

Mit Hilfe des beschriebenen Modells der gestrichenen Saite, bei dem an einem Ende der Saite ein einfachster komplexer Abschlußwiderstand angenommen wurde, können die dynamischen Vorgänge näherungsweise beschrieben werden. Da jedoch bei Streichinstrumenten die Rückwirkung des Geigenkörpers wesentlich komplizierter ist, als hier angenommen wurde, kann man mit Hilfe dieses Modells nicht die dynamischen Vorgänge in einem Streichinstrument erklären. Man wird aber annehmen dürfen, daß eine Erweiterung dieses beschriebenen Modells eine Beschreibung der wichtigsten Vorgänge in einem Streichinstrument in Aussicht stellt.

Literatur

- / 1 / HELMHOLTZ, H.v.: Lehre von den Tonempfindungen
Braunschweig 1862
- / 2 / RAMAN, C.V.: Ind. Assoc. Cult. Sci. Bull. 15
(1918)
- / 3 / KRIGAR-MENZEL, U.: Berliner Berichte (1831) XXXII,
RAPS, A. S. 613
- / 4 / OTTMER, D.: Diplomarbeit im Institut für
Technische Akustik der TU
Berlin, (1967)
- / 5 / TIPPE, W.: Studienarbeit im Institut für
Technische Akustik der TU
Berlin (1967)
- / 6 / LAZARUS, A.,
EISENBERG, P.: Vortrag a.d.Physikertagung
Frühjahr 1969
- / 7 / ROLOFF, E.: Z.angew. Phys. XVII (1963), S.62
- / 8 / LAZARUS, H.: Bericht der Deutschen Forschungs-
gemeinschaft 1966
- / 9 / CREMER, L.,
LAZARUS, H.: Vortrag ICA Tokio 1968
- /10 / REINICKE, W.: Bericht der Deutschen
Forschungsgemeinschaft 1970
- /11 / CREMER, L.: Bericht über gestrichene
Saite 1962
- /12 / KELLER, J.B.: Com. on Pure and Appl. Math.
Vol. VI (1953), S. 483
- /13 / FRIEDLANDER, F.G.: Cambr. Phil. Soc. Proc.
Vol. 49 (1953), Part 3, S. 516
- /14 / EGGERS, F., Acustica 9 (1959), S. 453
- /15 / SCHELLENG, J.C.: JASA 35 (1963), S. 326
- /16 / HEINRICH, P.: Studienarbeit am ITA 1967
(Inst. f. Techn. Akustik der TU
Berlin)
- /17 / BURCKHARD, H.: Diplomarbeit am Institut für
Technische Akustik der TU
Berlin 1969



Lazarus
1967

Helmholtztype

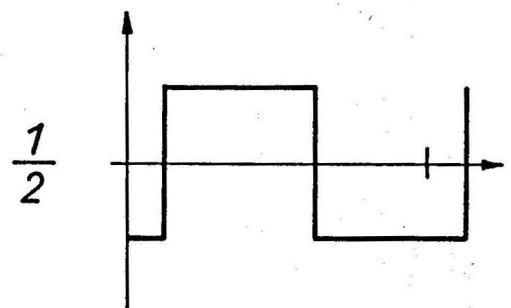
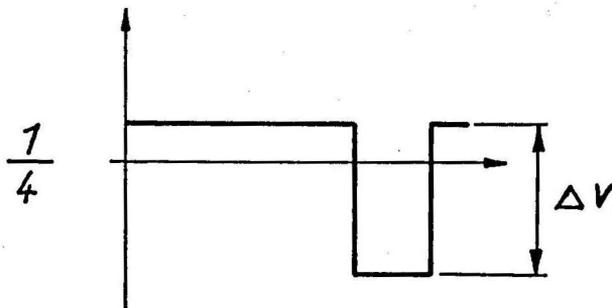
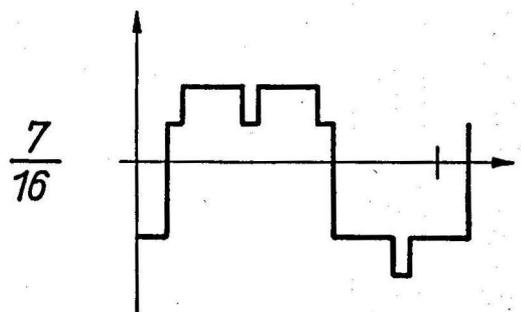
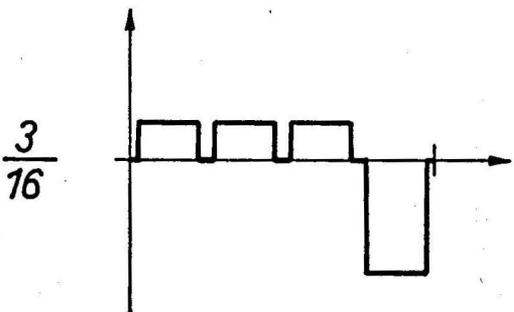
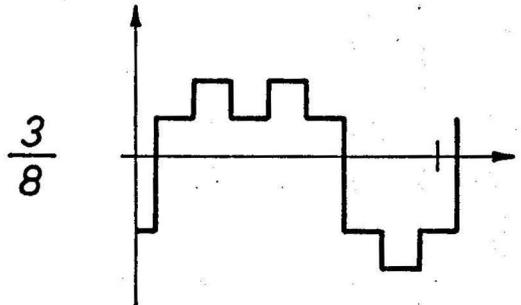
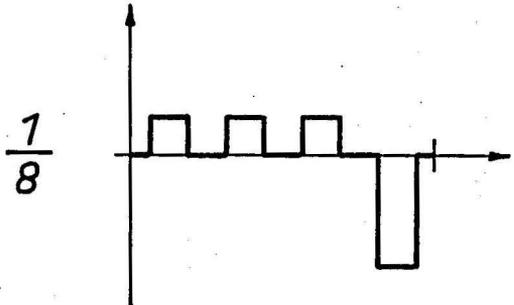
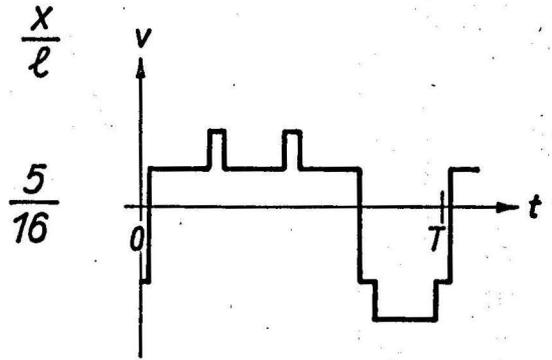
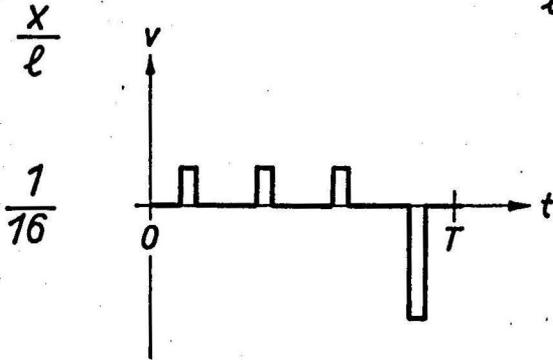
Abb. 1

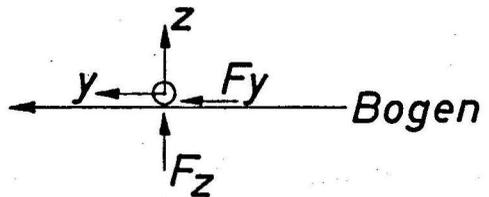
Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin

Schnelle, wenn $\frac{x_a}{\ell} = \frac{1}{i}$ ein rationales Verhältnis ist:

$$v = \frac{2\Delta V}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{2n\pi t}{T} - \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{2n\pi t}{T} \right]$$

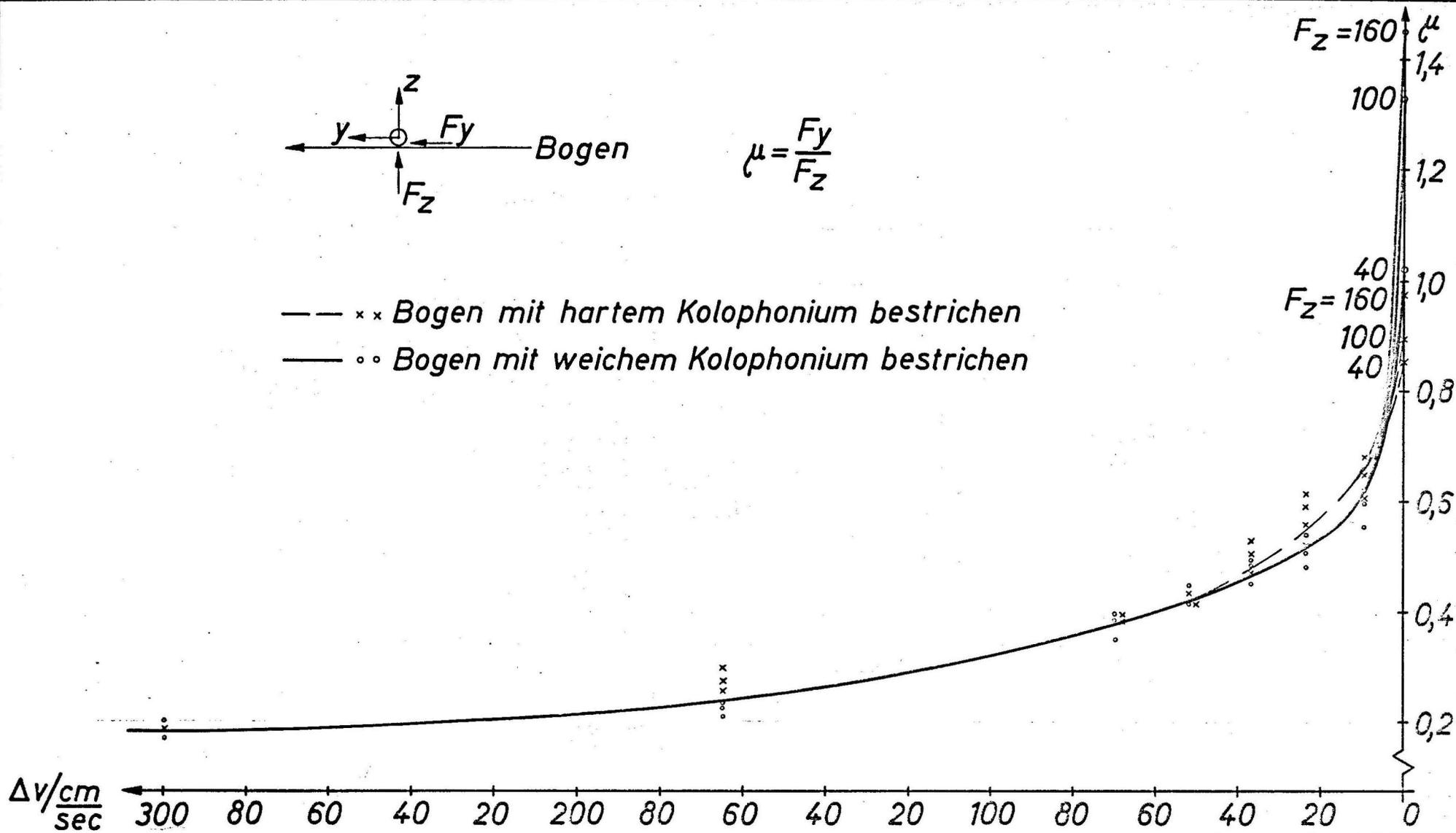
$$\frac{x_a}{\ell} = \frac{1}{4}$$





$$\mu = \frac{F_y}{F_z}$$

- x x Bogen mit hartem Kolophonium bestrichen
- o o Bogen mit weichem Kolophonium bestrichen



Lazarus
1967

Selbsterregte Schwingungen der gestrichenen Saite

Abb. 3

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin

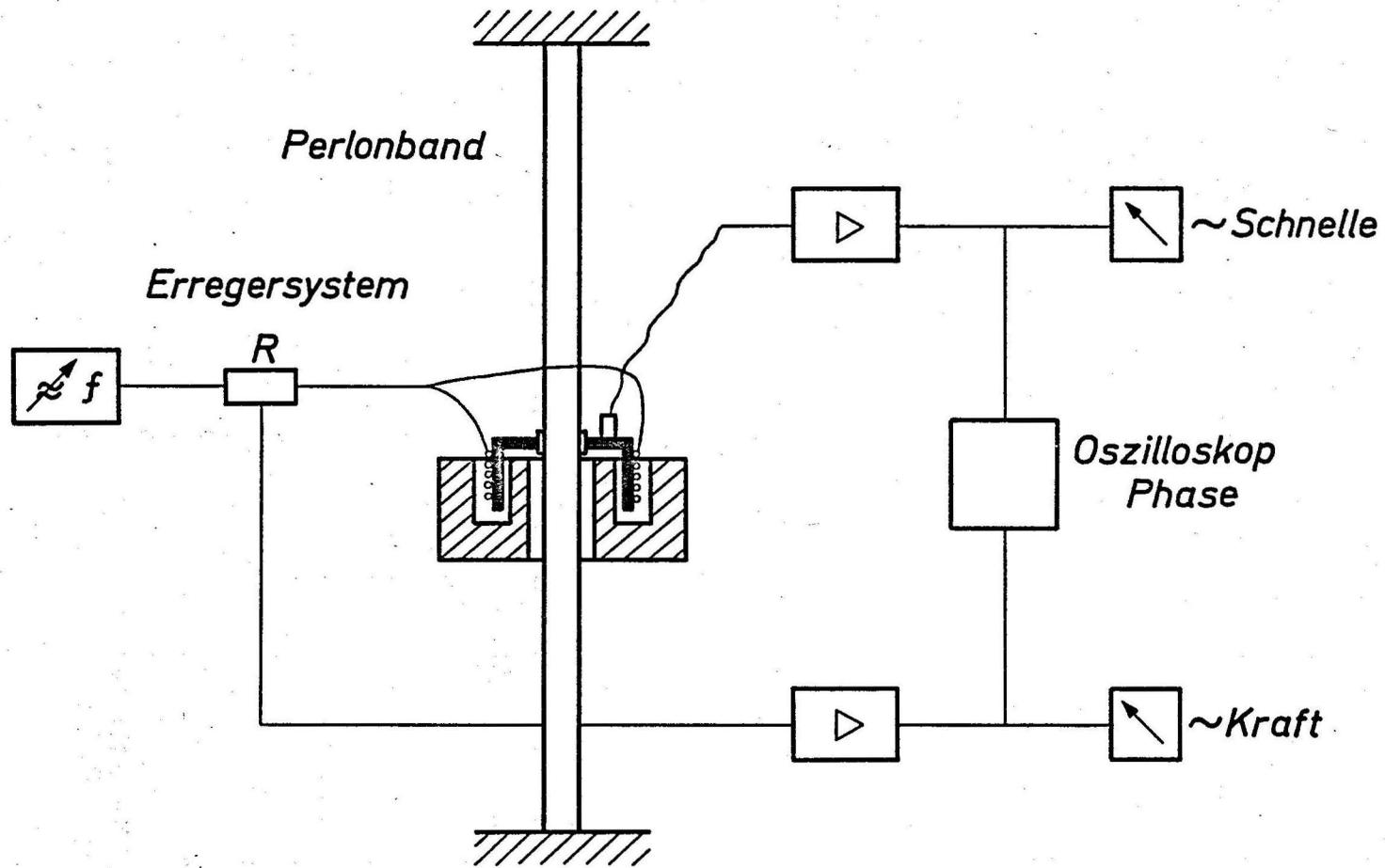
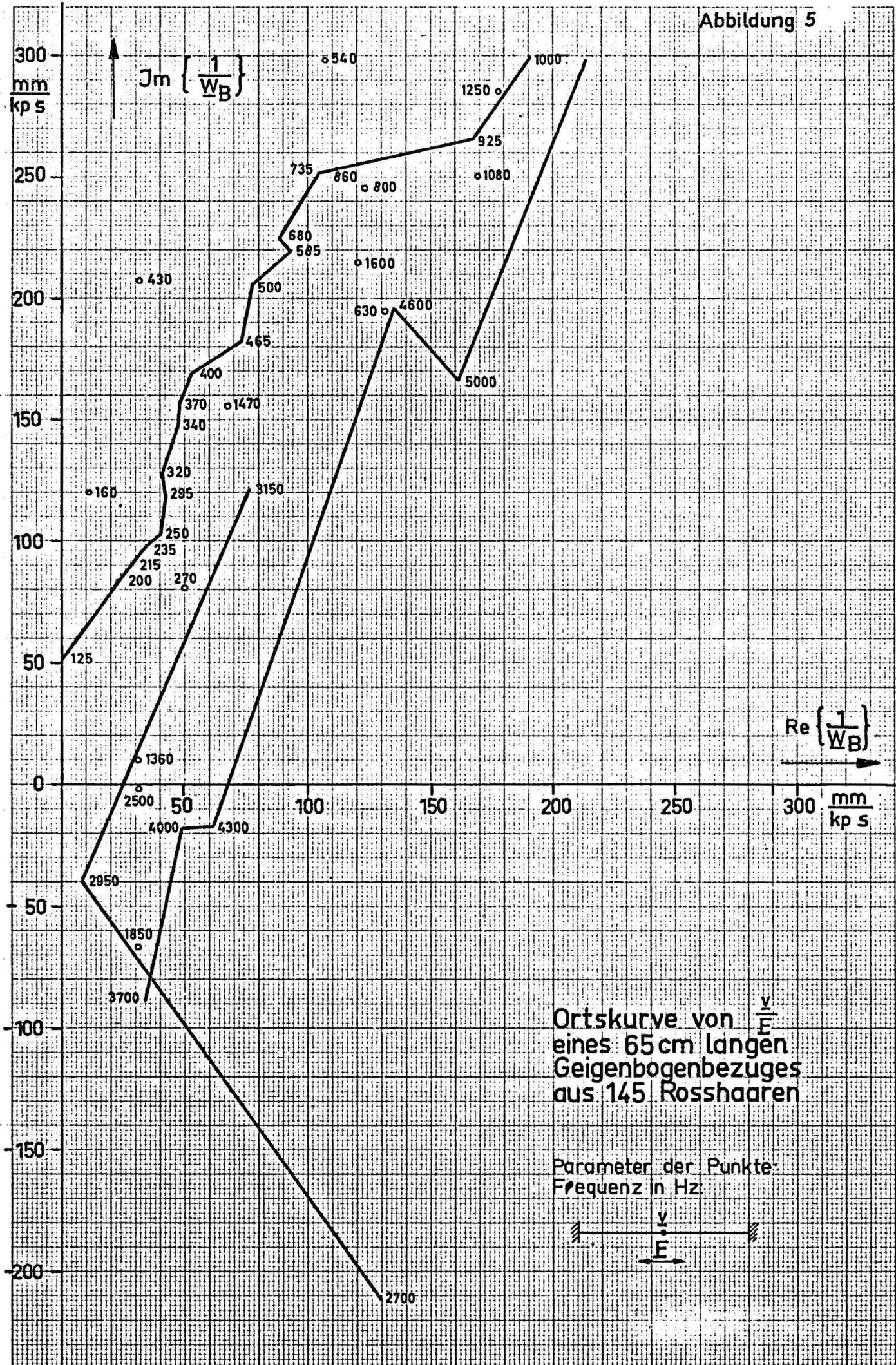


Abb. 4

Messung der longitudinalen Bogenimpedanz

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin



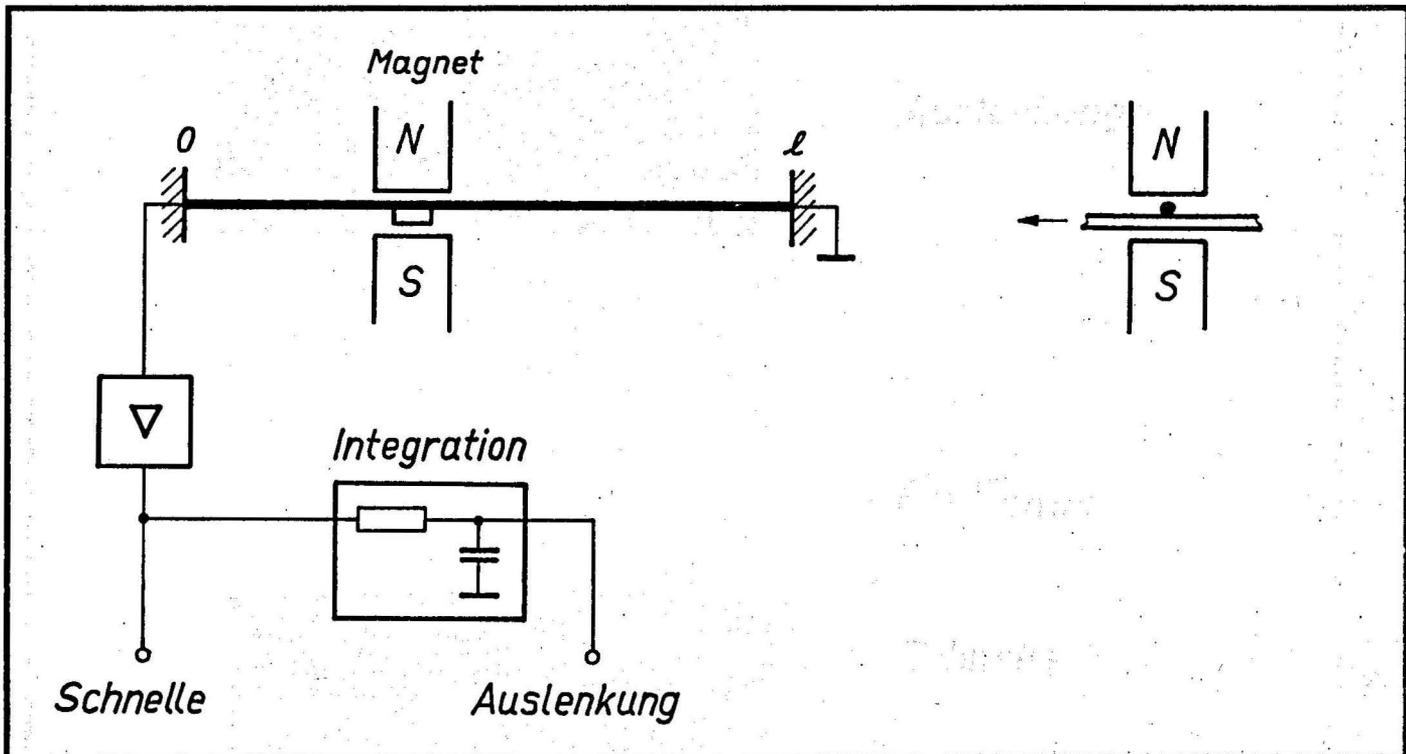


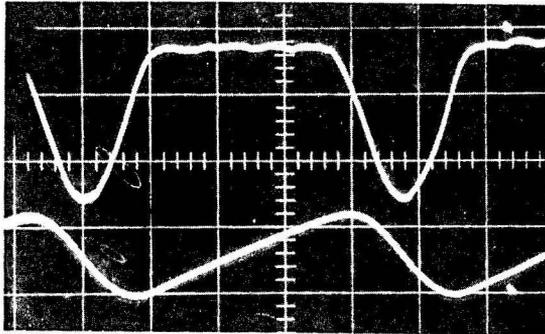
Abb. 6

Elektrodynamische Abnahme
der Schnelle

Techn. Akustik
TU Berlin

$$\frac{x_a}{e} = \frac{1}{4}$$

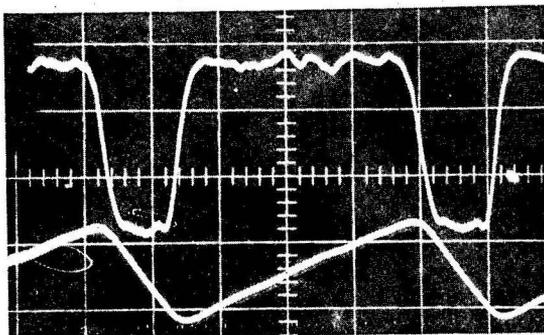
$F = F_{z \min.}$



Schnelle

Auslenkung

$F = F_{z \max.}$



Schnelle

Auslenkung

Saite: $3 \text{ mm } \phi$
gespannt zwischen 2 festen Enden

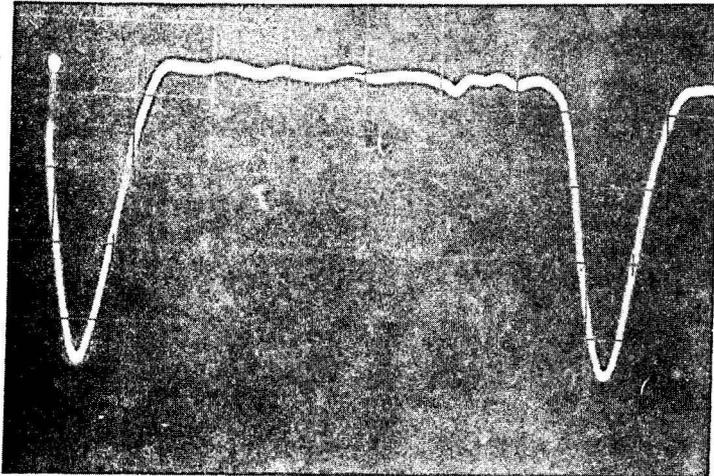
Lazarus
1967

Schnelle an der
Anstreichstelle

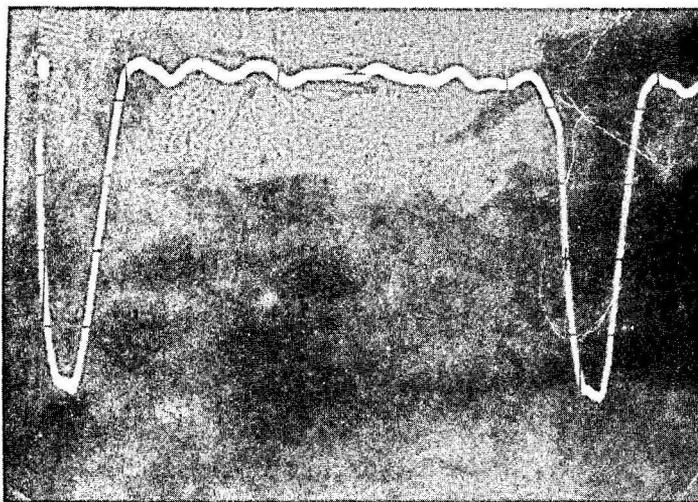
Abb. 7

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin

$$\frac{x_a}{e} = \frac{1}{10}$$



$F_z \min$



$F_z \max$

*Saite: C - Stahl - Saite
gespannt auf ein Cello*

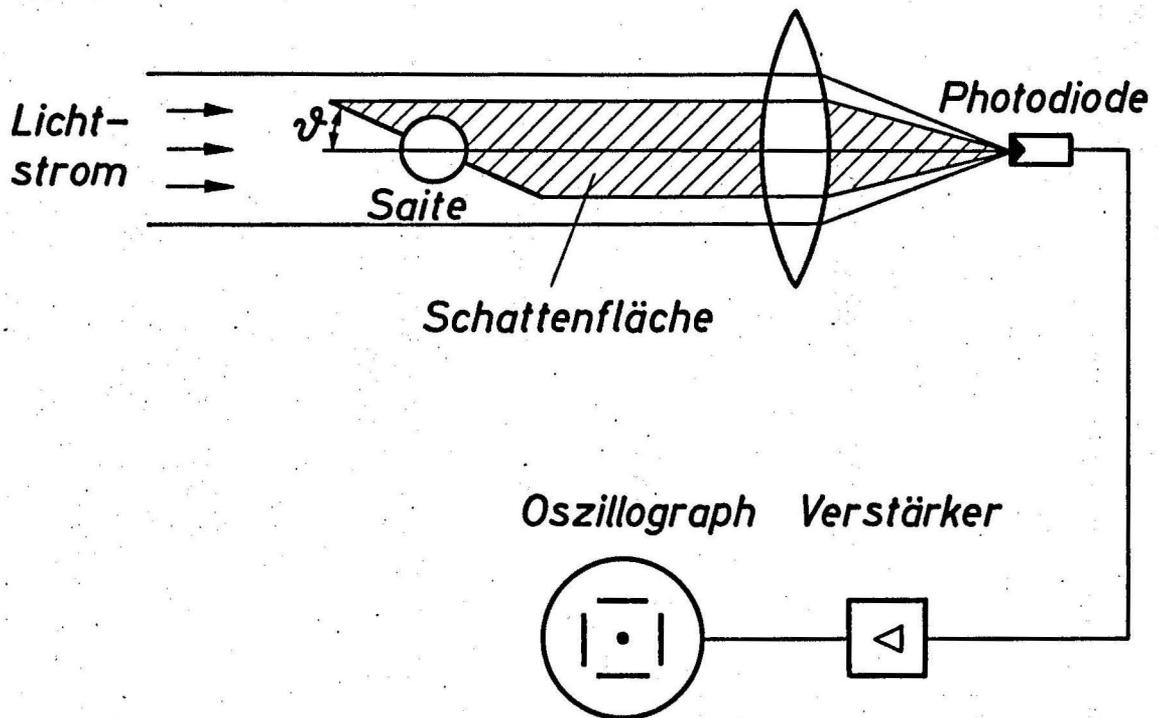
Lazarus
1970

Schnelle an der
Anstreichstelle

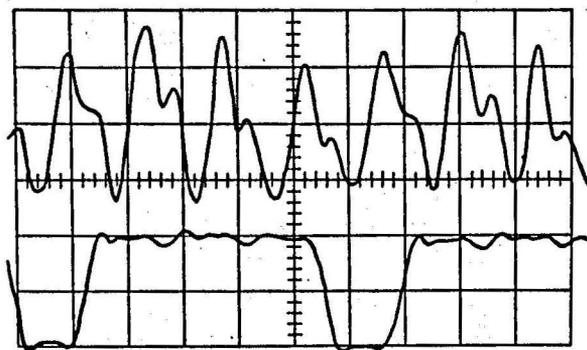
Abb. 8

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin

Messung der Torsion



Oszillogramm

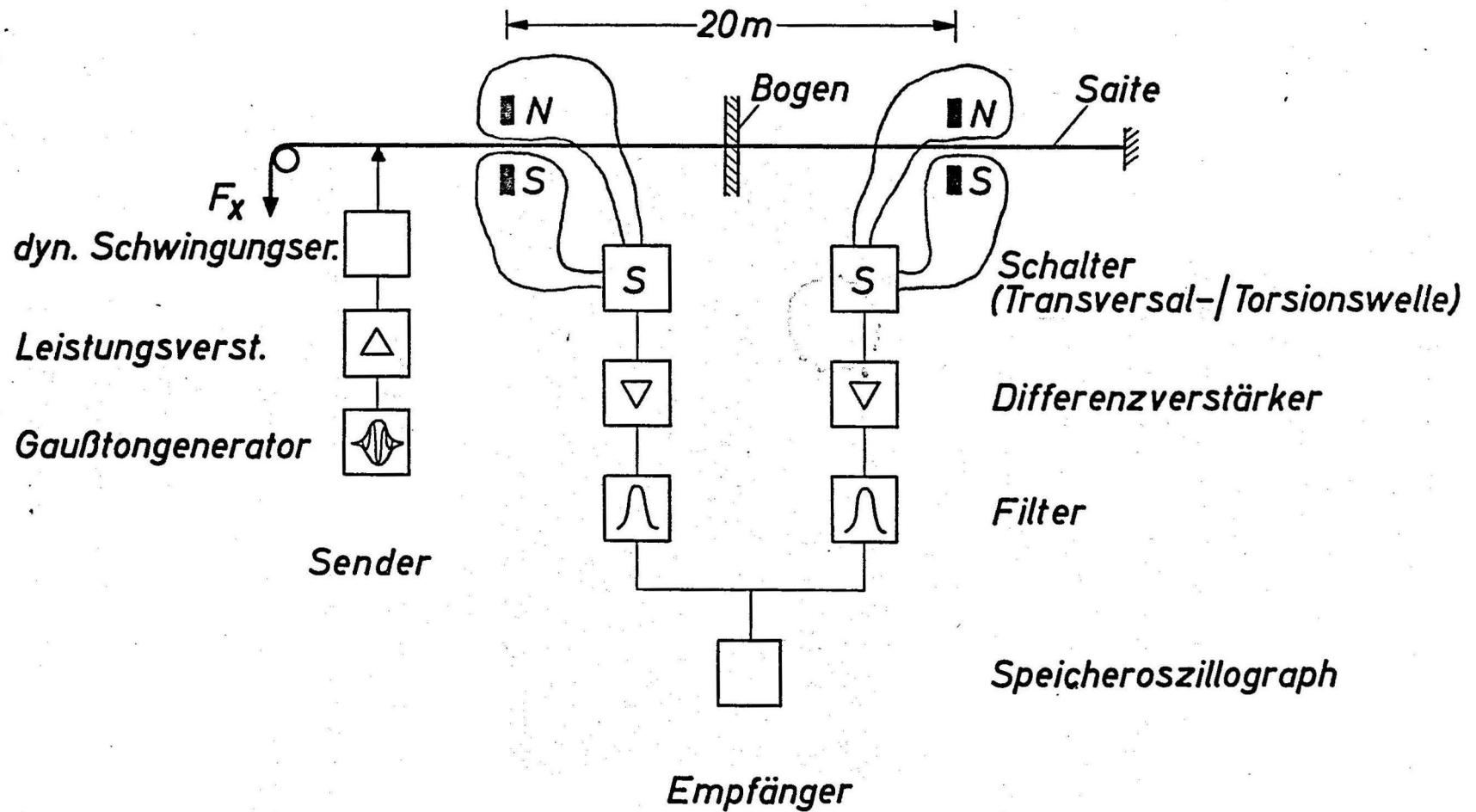


~ Winkel $\Delta\varphi$

~ Schnelle

angestrichen bei $\frac{x_a}{e} = \frac{1}{4}$

gemessen bei $\frac{x_m}{e} = \frac{3}{4}$



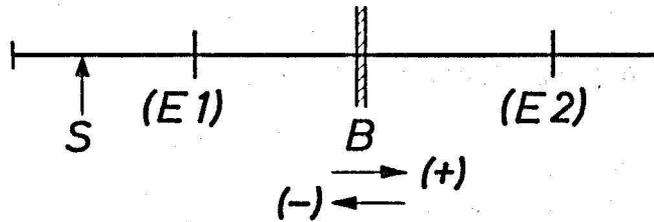
Lazarus
1969

Meßaufbau zur Bestimmung der Randbedingung

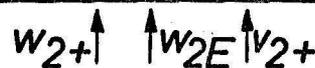
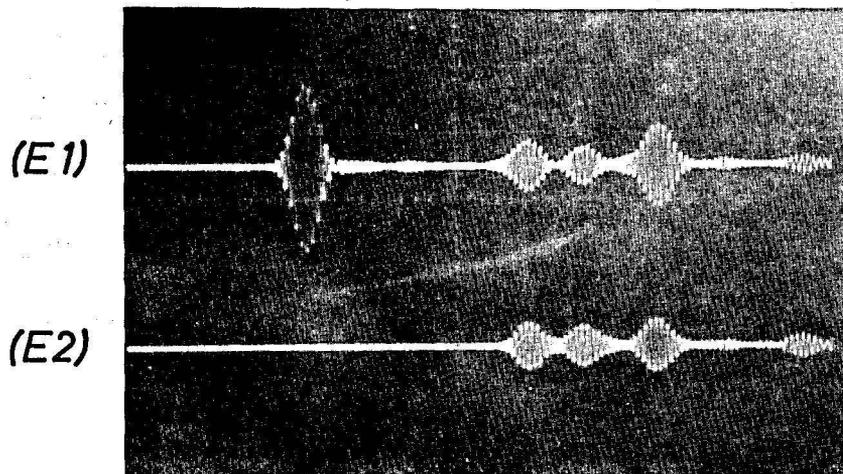
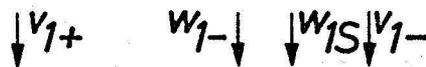
Bogen – Saite

Abb. 10

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin



- v_{1+} ankommender Transversalimpuls
- $a \cdot w_{1-}$ bei B entstandener Torsionsimpuls
- $a \cdot w_{1S}$ bei S reflektierter Torsionsimpuls
- v_{1-} bei B reflektierter Transversalimpuls



- $a \cdot w_{2+}$ bei B entstandener Torsionsimpuls
- $a \cdot w_{2E}$ am Ende reflektierter Torsionsimpuls
- v_{2+} bei B transmittierter Transversalimpuls

v Schnelle

w Winkelschnelle

a Radius der Saite

Abb. 11

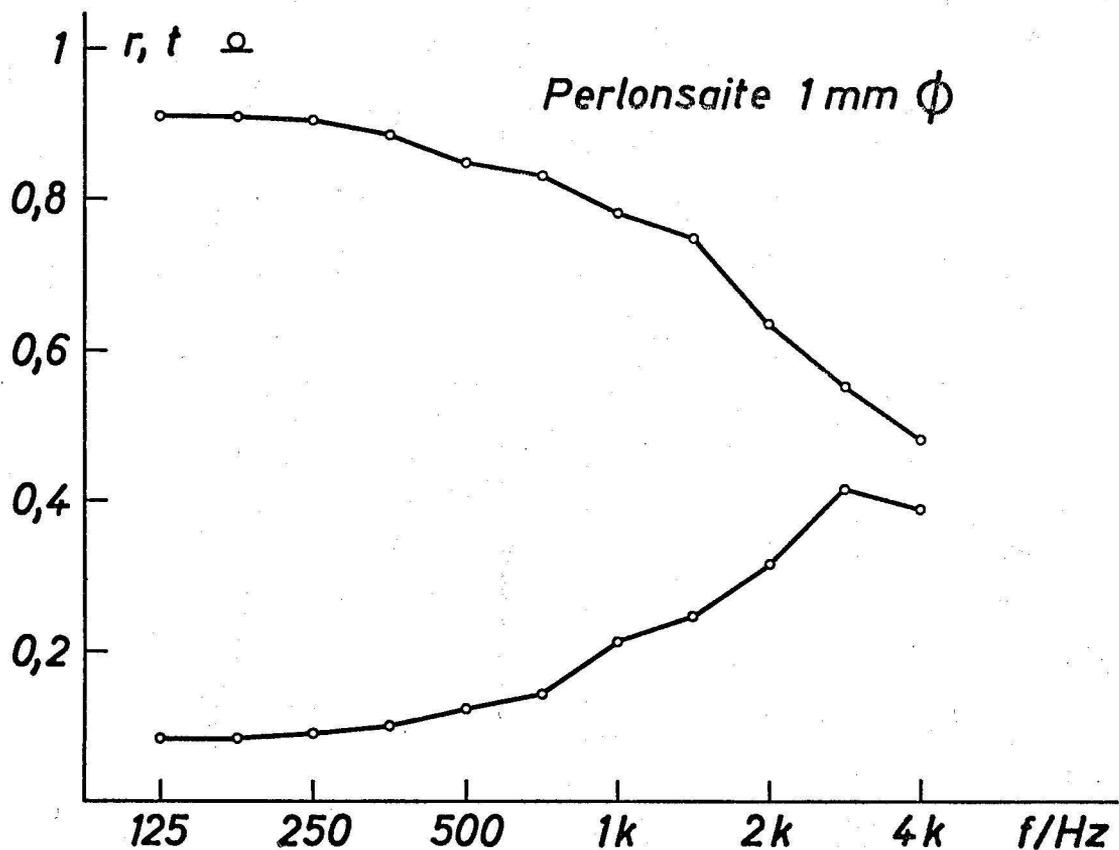
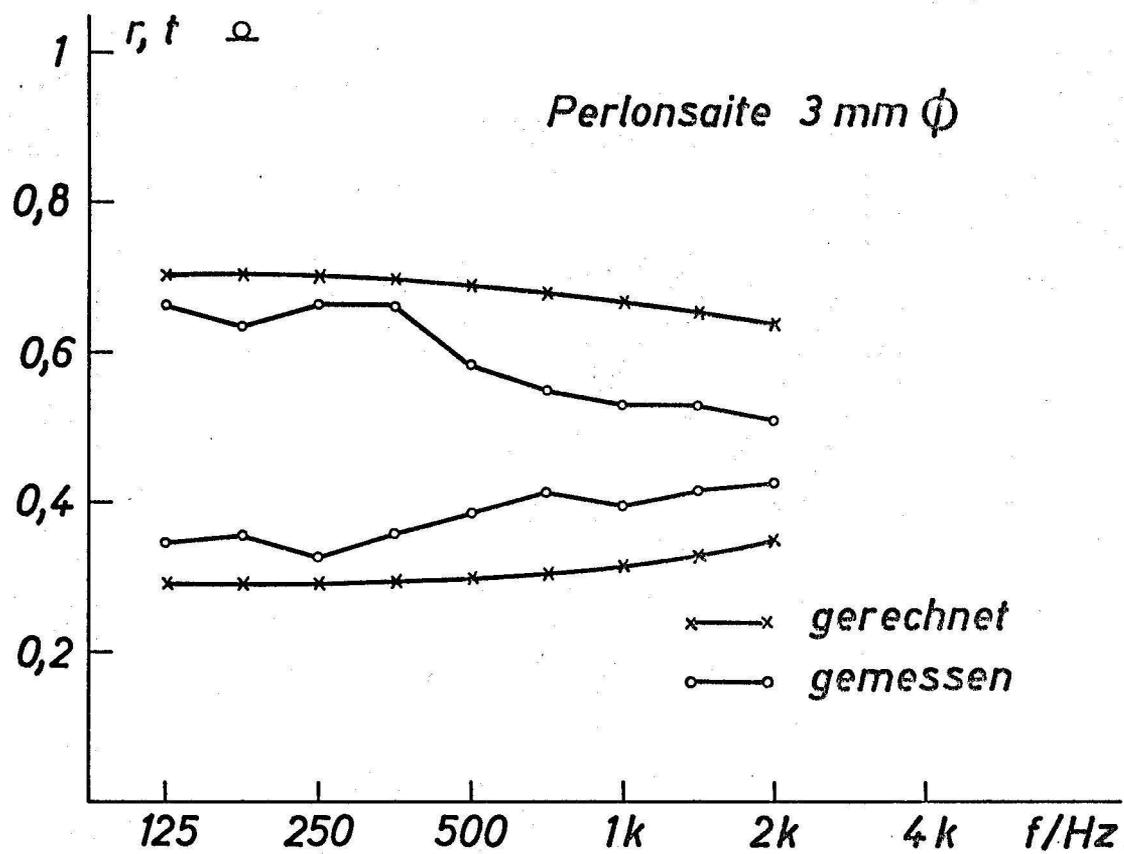


Abb. 12

Lazarus
1969

Reflexions. u. Transmissionsfaktor
bei Randbed. Perlonsaite-Bogen

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin

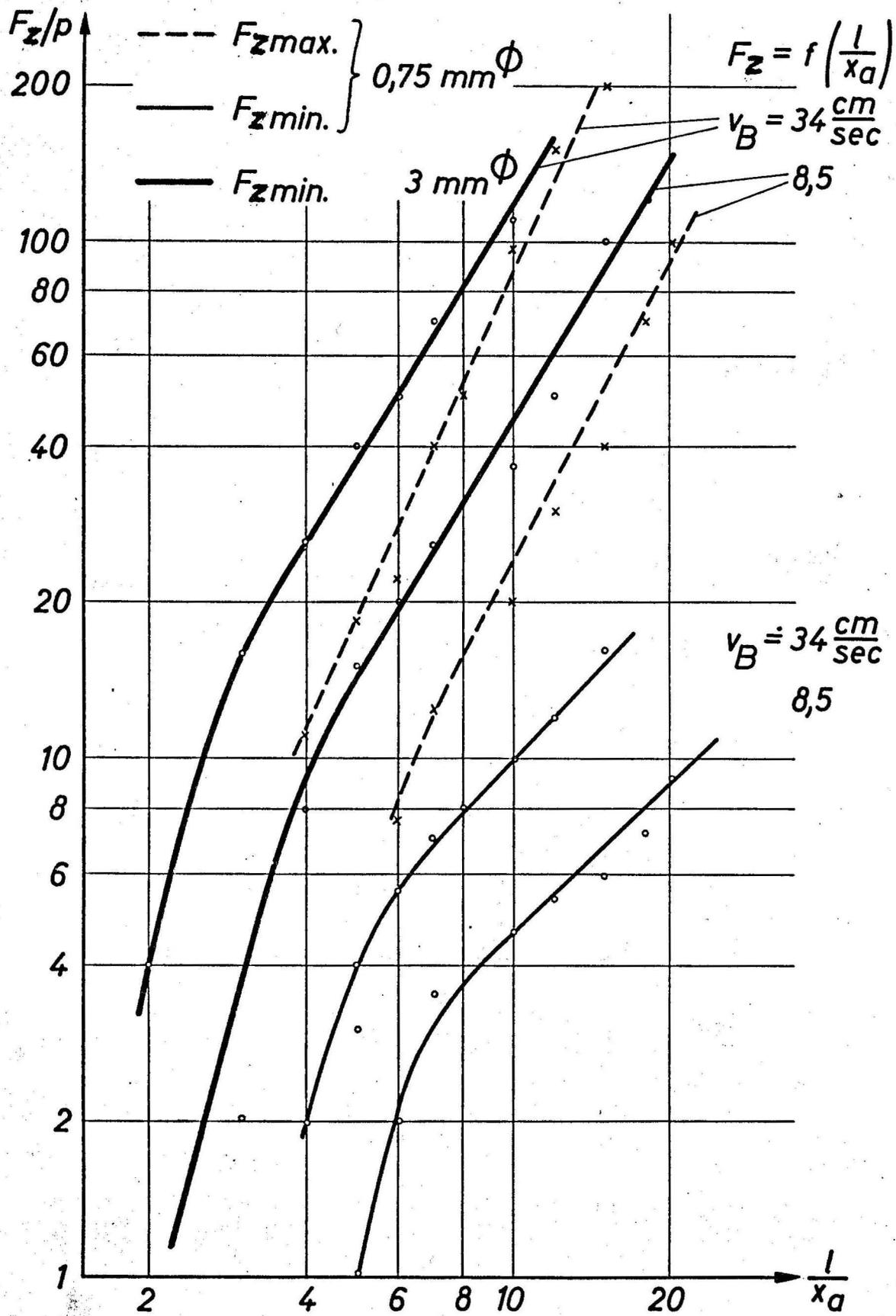


Abb. 13

Lazarus
1967

minimaler Bogendruck F_z , Saite
zwischen 2 feste Enden gespannt

Institut f.
Techn. Akustik
TU Berlin

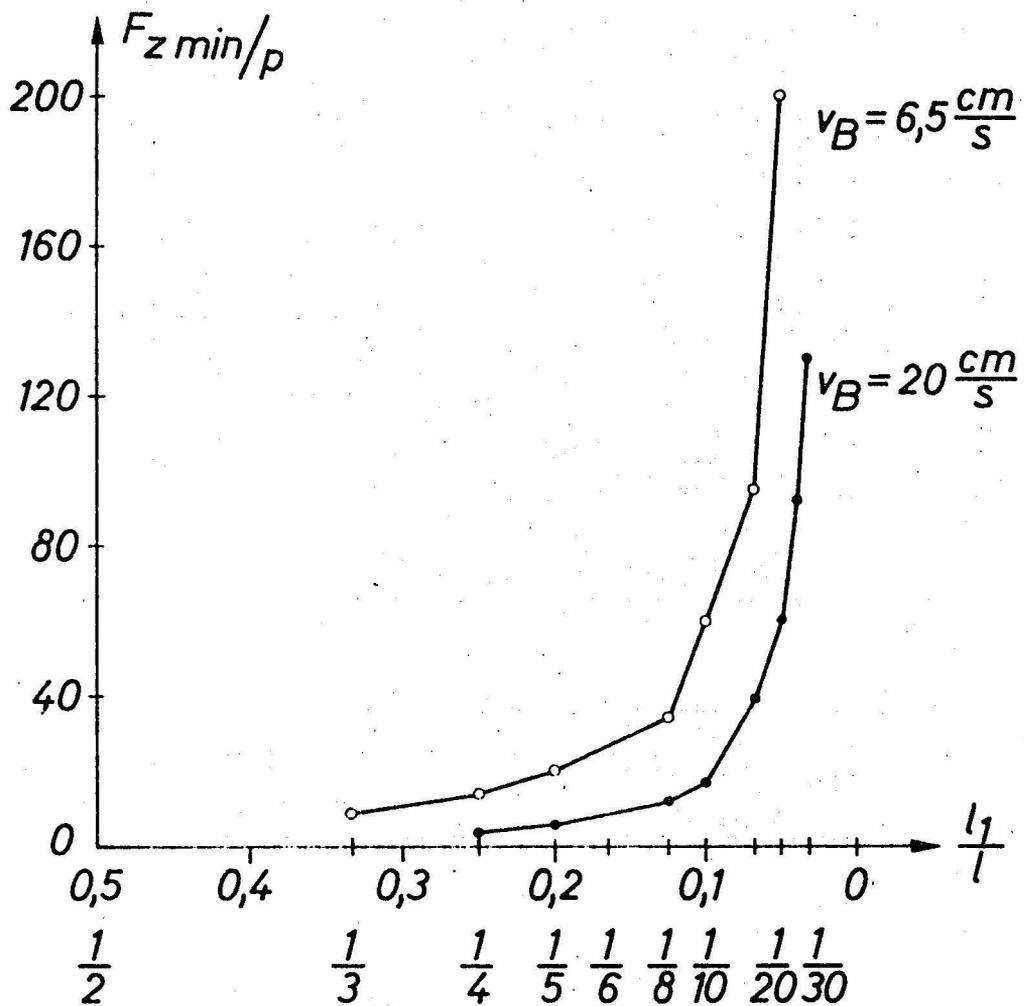


Abb. 14

Lazarus

minimaler Bogendruck F_z for
die tiefste Saite des Cellos

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin

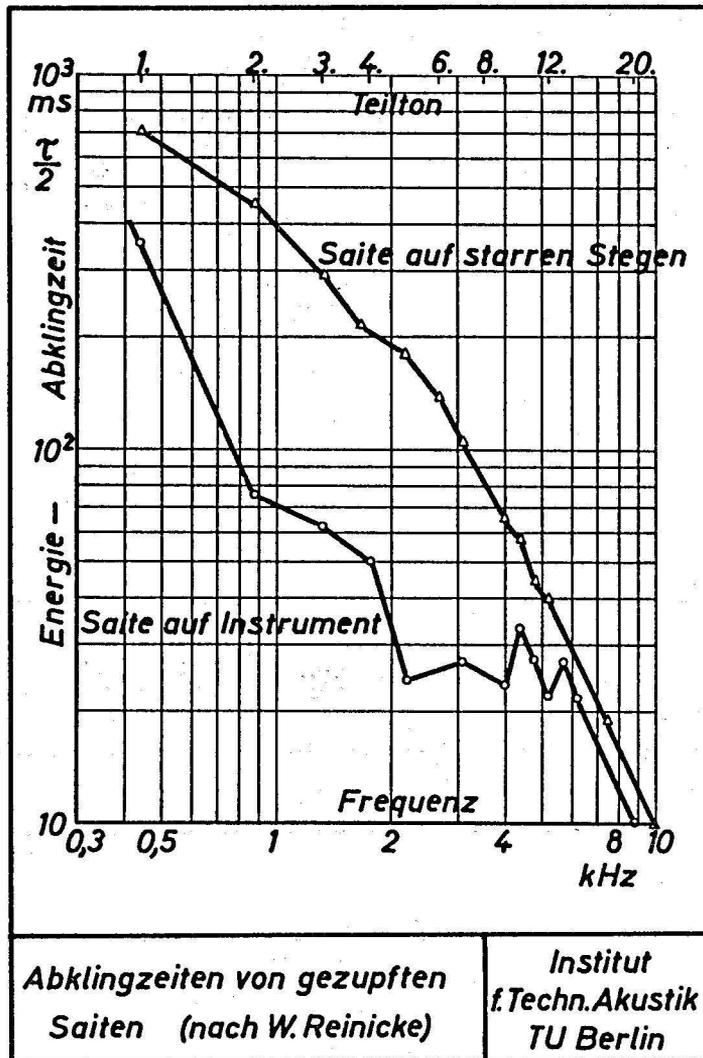
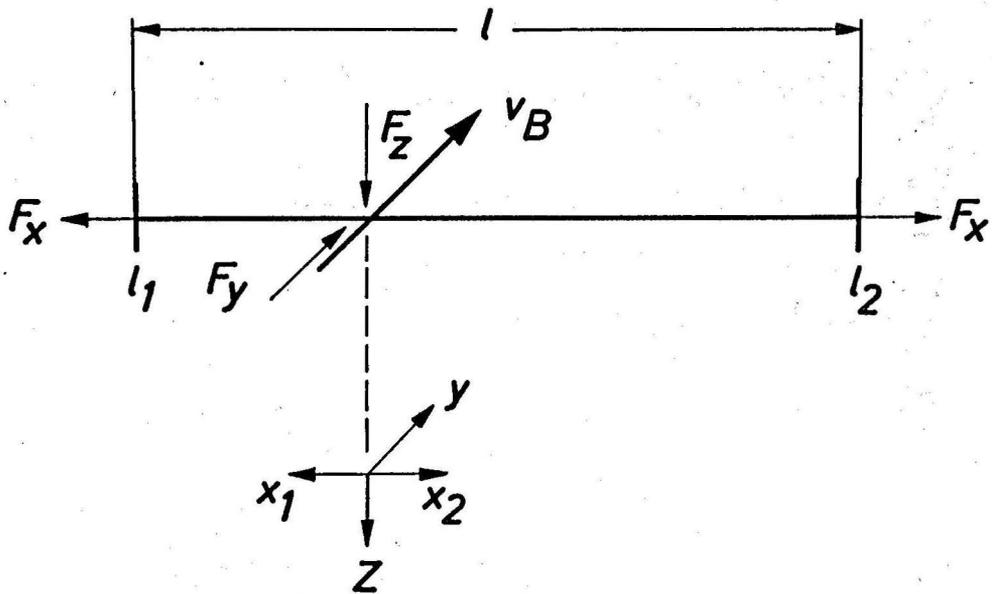


Abb. 15

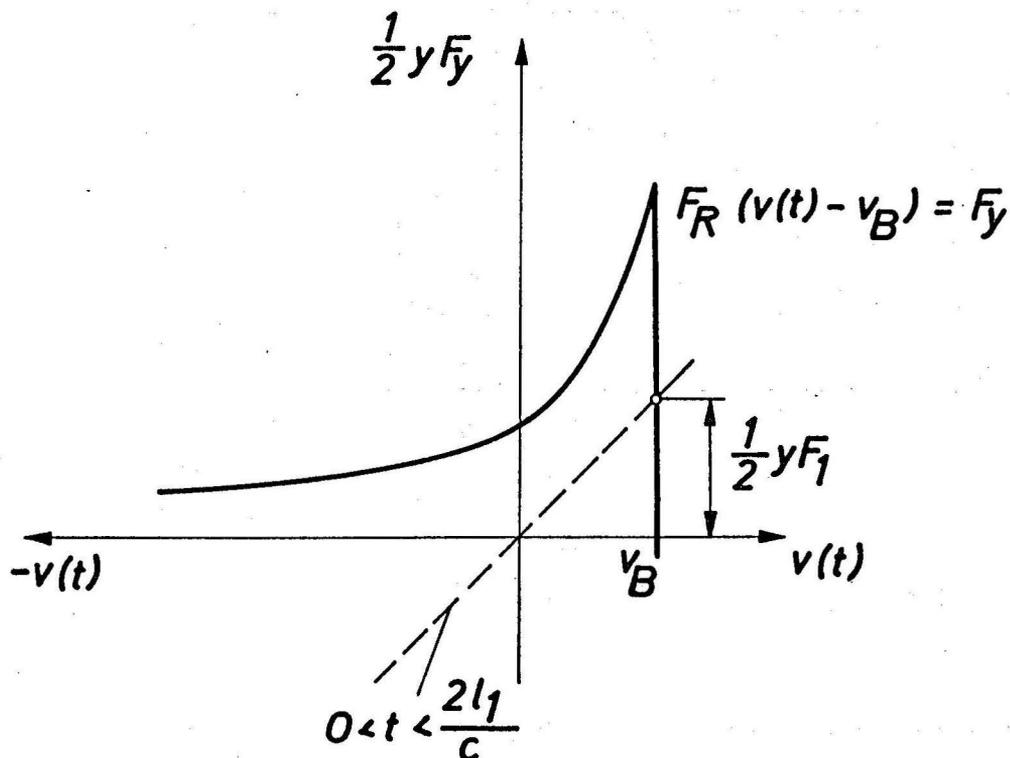


Lazarus
1970

Bezeichnungen

Abb. 16

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin



Lazarus
1970

Zur Entwicklung der Lösung aus
Teilwellen

Abb. 17

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin

Periode $T = \frac{2\ell}{c}$, $r = r_0 \neq f(p)$

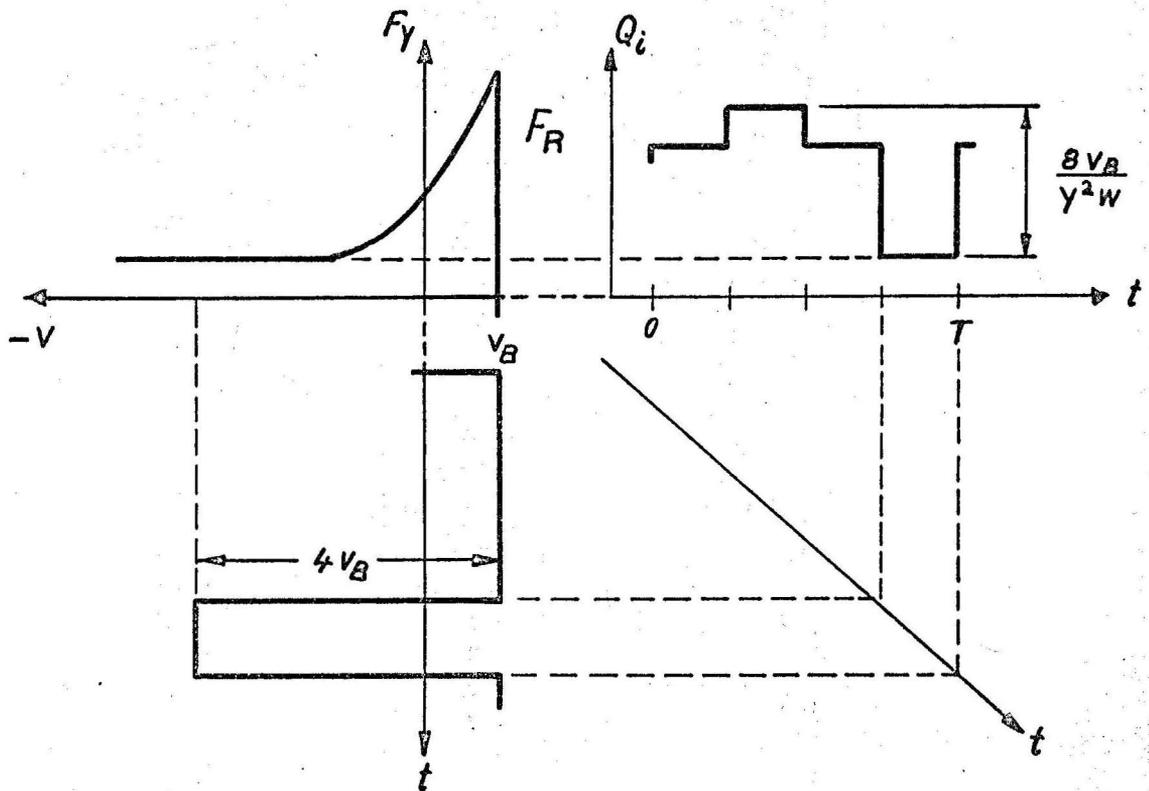
$$\frac{1}{2} Y(Q_{n+1} - Q_{n+2}) = \frac{1-r_0}{1-r_0^4} [V_{n+1} + V_{n+4} r_0 + V_{n+3} r_0^2 + V_{n+2} r_0^3]$$

$$\frac{1}{2} Y(Q_{n+2} - Q_{n+3}) = \frac{1-r_0}{1-r_0^4} [V_{n+2} + V_{n+5} r_0 + V_{n+4} r_0^2 + V_{n+3} r_0^3]$$

$$\frac{1}{2} Y(Q_{n+3} - Q_{n+4}) = \frac{1-r_0}{1-r_0^4} [V_{n+3} + V_{n+6} r_0 + V_{n+5} r_0^2 + V_{n+4} r_0^3]$$

$$\frac{1}{2} Y(Q_{n+4} - Q_{n+5}) = \frac{1-r_0}{1-r_0^4} [V_{n+4} + V_{n+7} r_0 + V_{n+6} r_0^2 + V_{n+5} r_0^3]$$

mit $Q_i = Fy = F_R (v_i - v_B)$ $i = n+1, n+2, n+3, \dots$



$$F_{z \min} = \frac{1}{(\mu_{H \max} - \mu_{G_0})} 2 v_B \frac{\ell}{\ell_1} \frac{1}{\gamma^2 W} \quad \gamma W \gg 1$$

Abb. 18

$w_r' = \frac{s_1}{j\omega}$ Steife des Steges

w_j' allgemeine Verluste

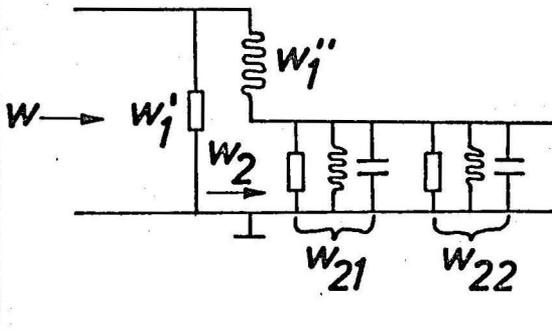
w_2 berücksichtigt die Resonanzen des Geigenkörpers

z.B.

w_{21} Hohlraumresonanz

w_{22} Hauptresonanz

mit $w'' \gg w'$

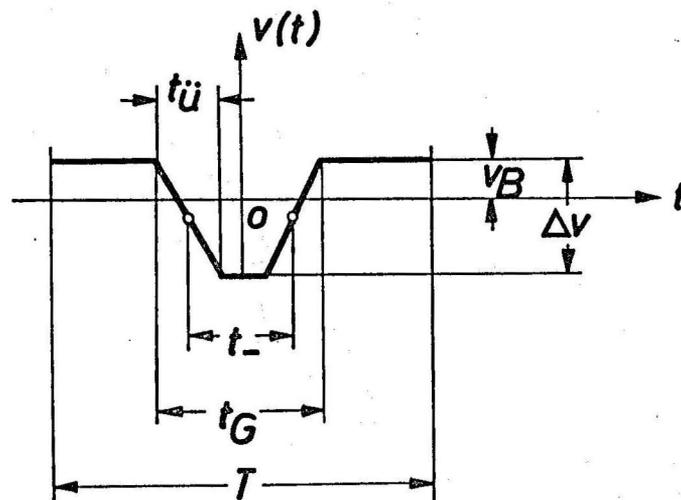


Lazarus
1970

Modell des Eingangswiderstandes
eines Geigenkörpers

Abb. 20

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin



Lazarus
1970

Ansatz für den Zeitverlauf der
Schnelle

Abb. 21

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin

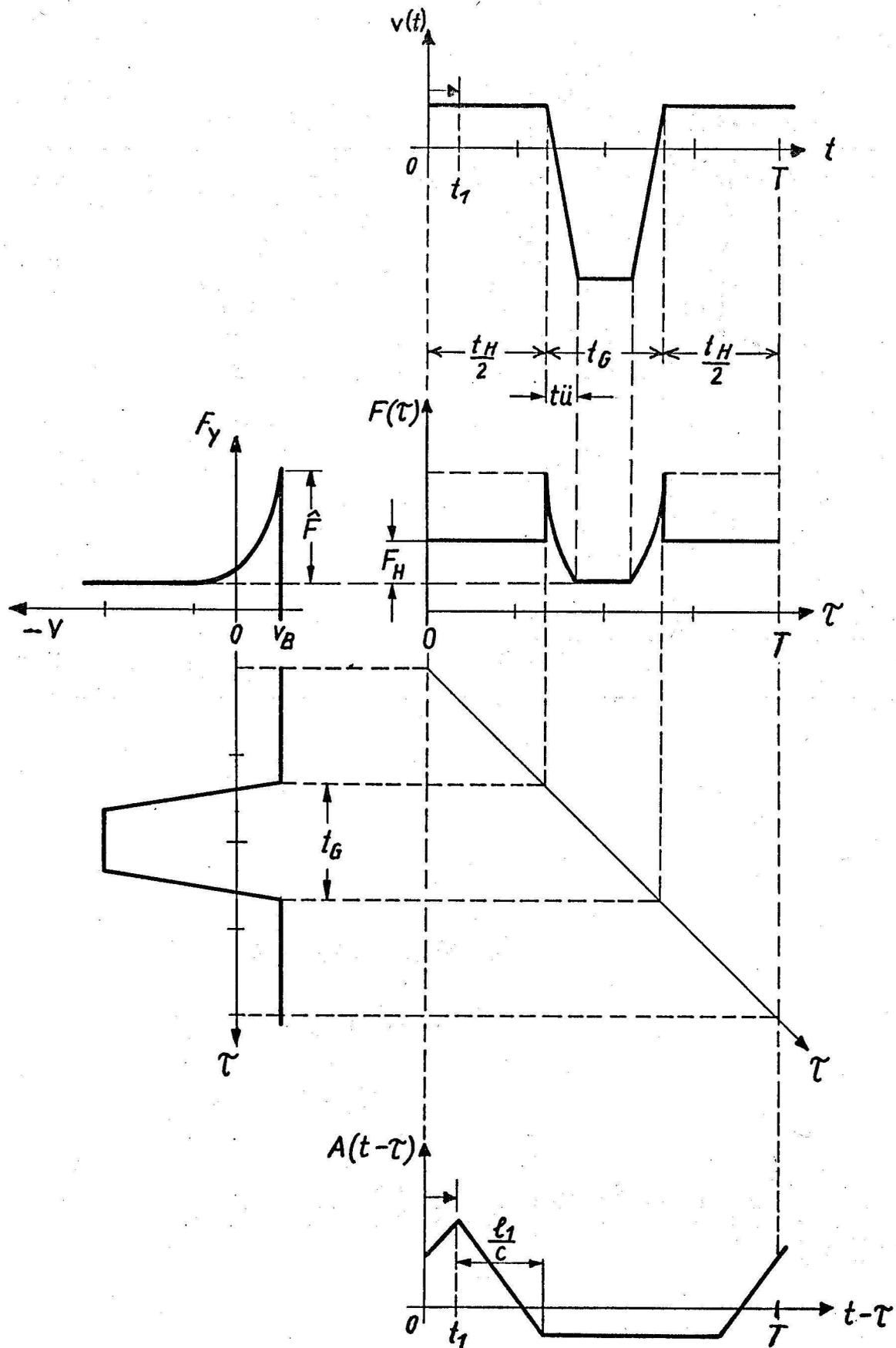
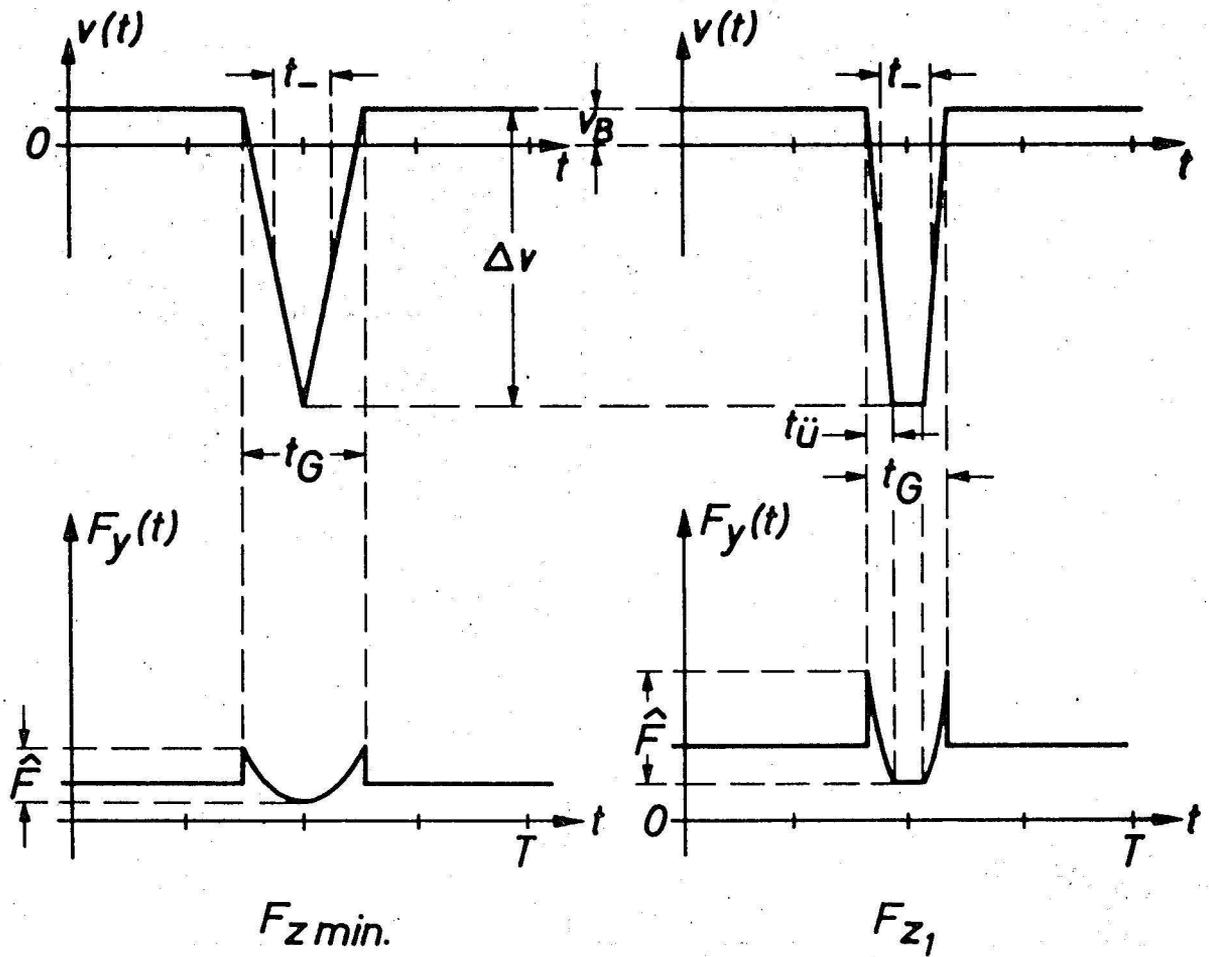


Abb. 22

Lazarus
Abb. 22

periodische Lösung am
Anstreichpunkt $\frac{l_1}{c} = \frac{1}{4}$, $w = w_0 + \frac{s}{j\omega}$

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin



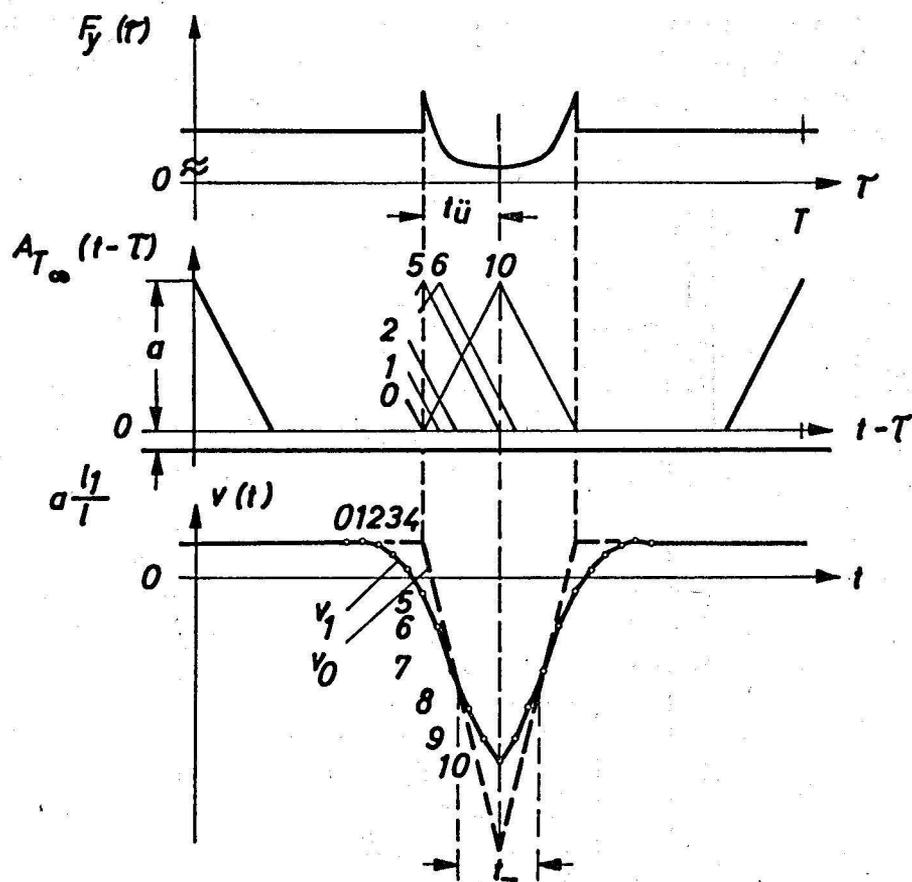
t_G Gleitphasendauer

$t_{\ddot{u}}$ Übergangszeit

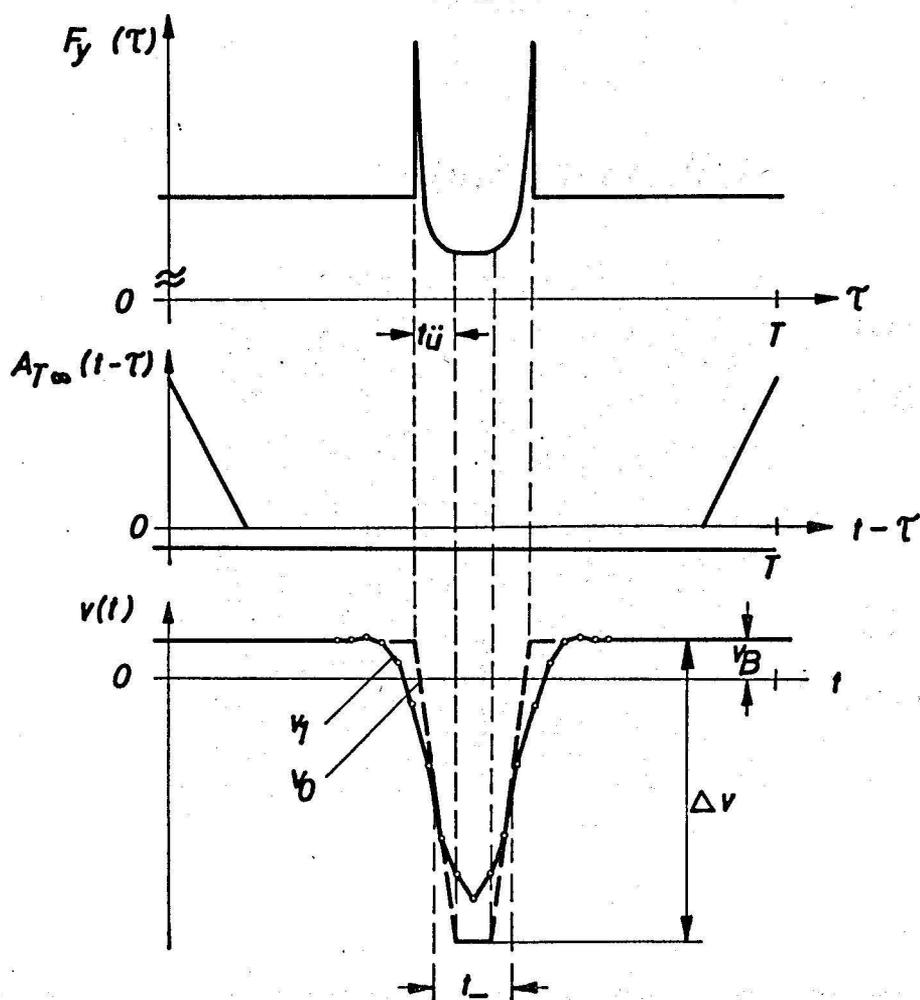
$$F_{z\min} < F_{z_1}$$

$$F_z = \frac{1}{\mu_H - \mu_G} \quad \hat{F} = \frac{1}{\mu_H - \mu_G} \left[\frac{\beta m' c^2}{\pi^2 4} (\Delta v)^2 \left(\frac{l}{l_1} \right)^2 \frac{1}{\frac{t_{\ddot{u}}}{t_-} \left(\frac{t_{\ddot{u}}}{t_-} + 1 \right)} \right]$$

Abb. 23



$$F_z = F_z \text{ min} \\ (t_{\ddot{u}} = t_-)$$



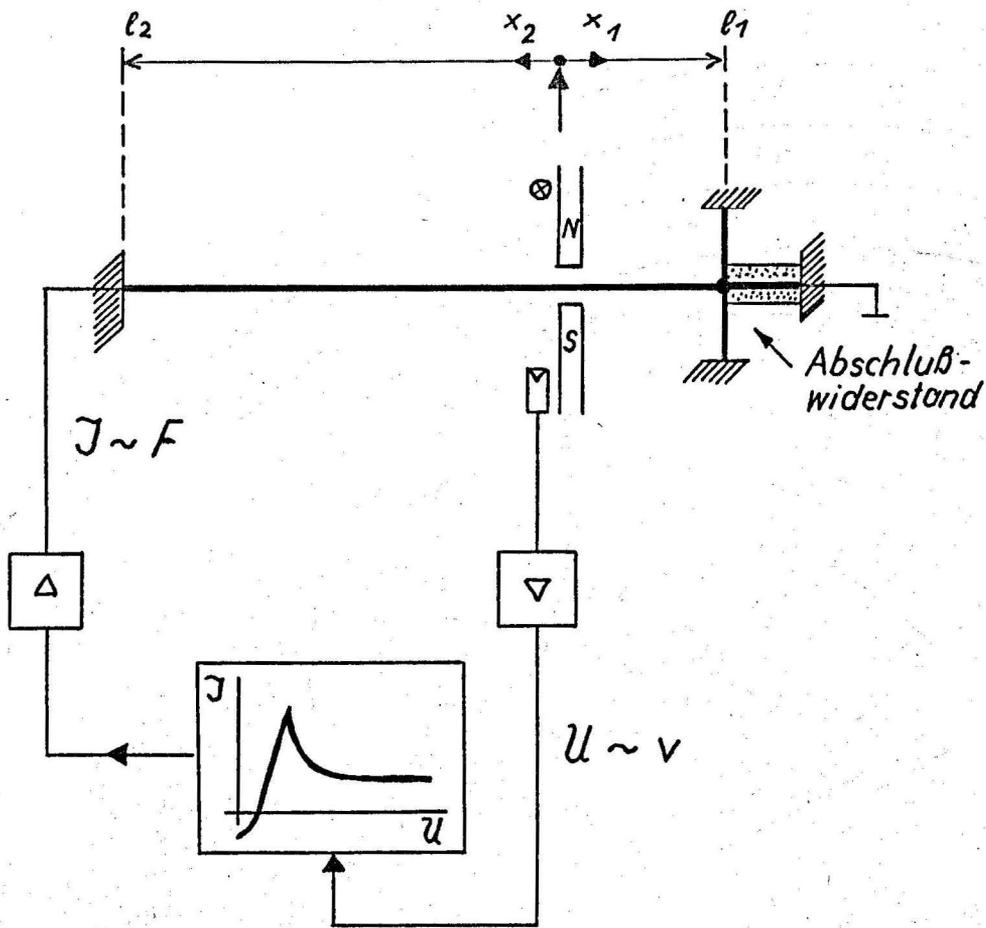
$$F_z = \frac{8}{3} F_z \text{ min} \\ (t_{\ddot{u}} = \frac{1}{2} t_-)$$

Abb. 24

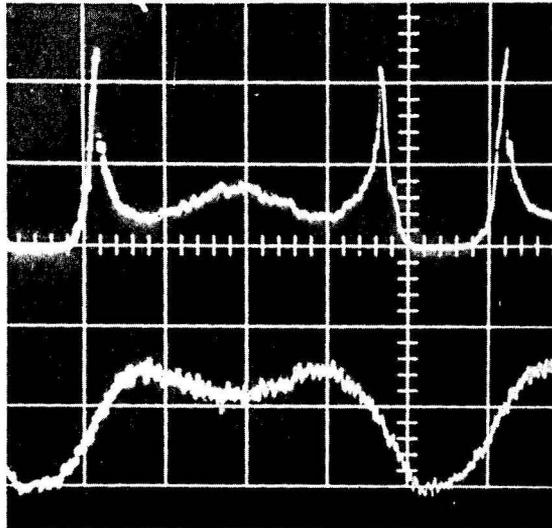
Lazarus
1970

Vergleich $v_1 = \int_0^T A(t-T) \cdot F_y(\tau) d\tau$ mit
dem Trapezansatz $v_0, \frac{l_1}{T} = \frac{t_-}{T} = \frac{1}{8}$

Institut
f. Techn. Akustik
TU Berlin



Reibungskennlinie



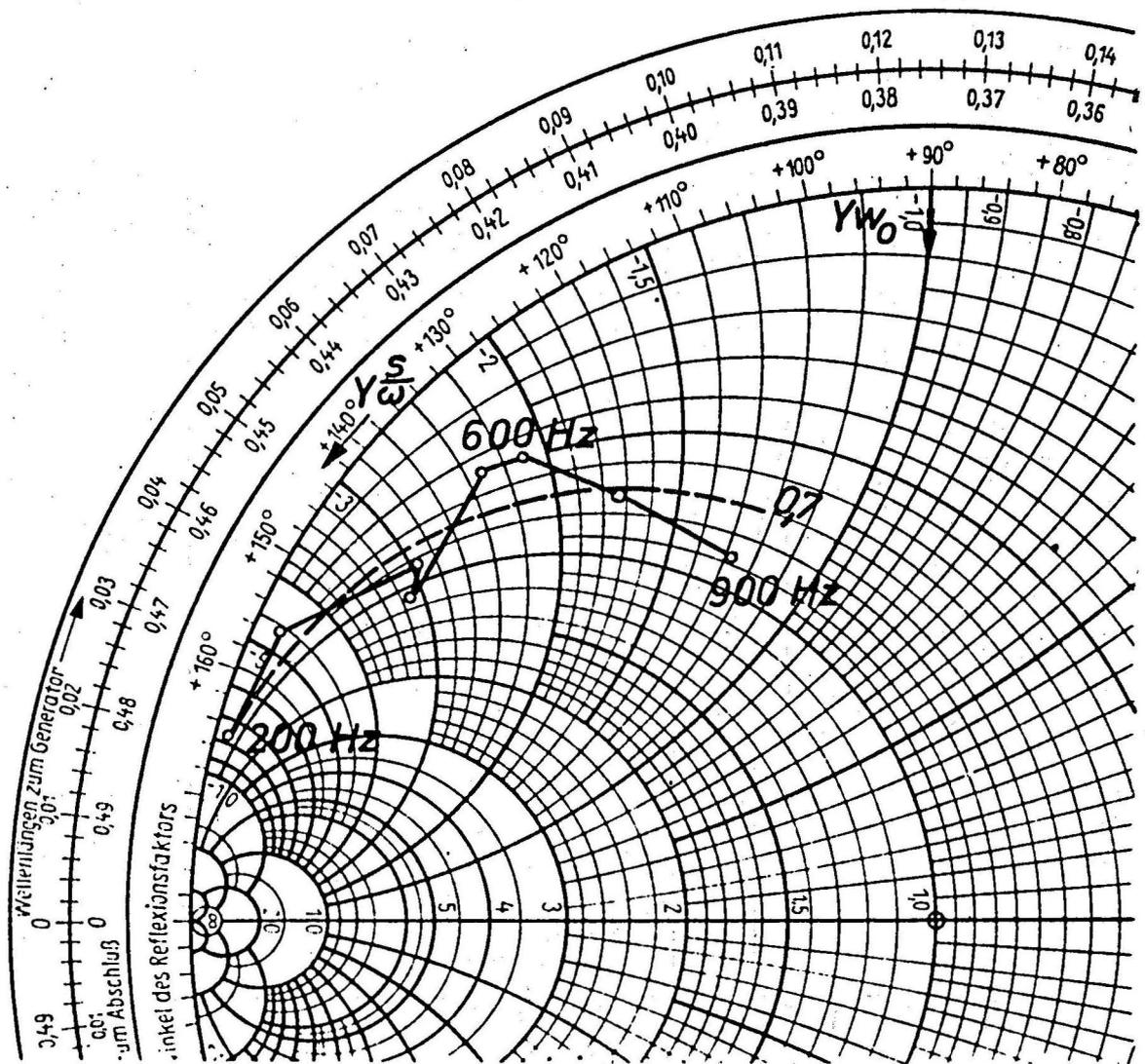
Strom $J \sim$

Kraft F

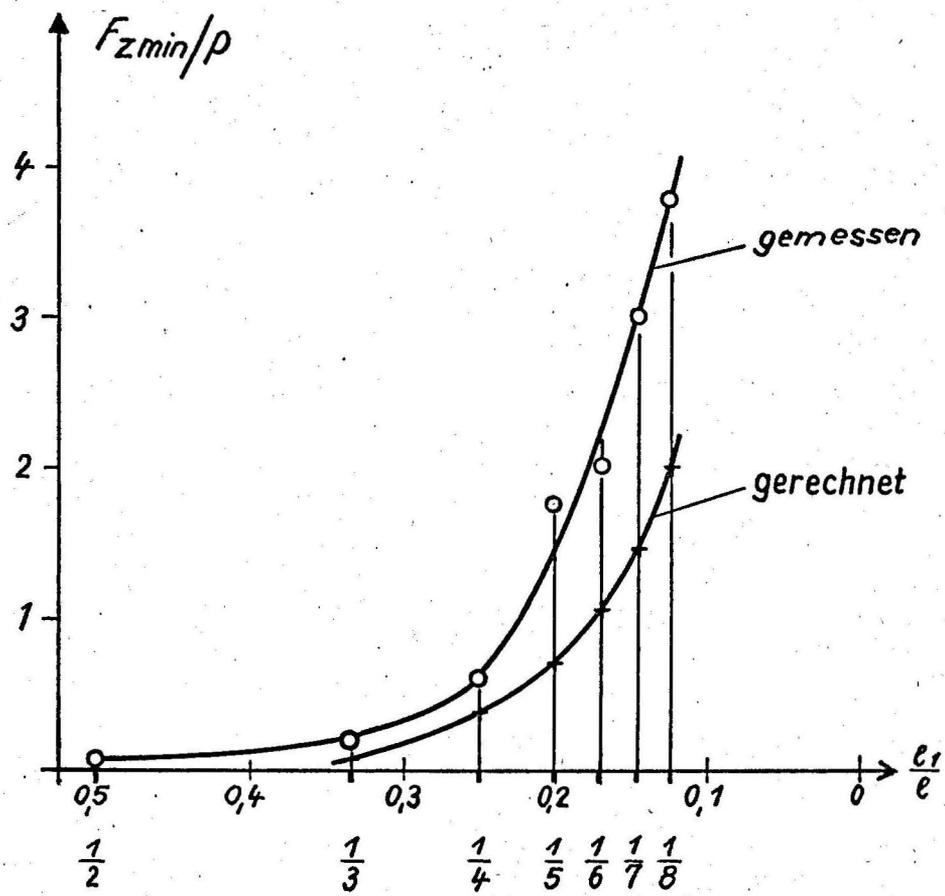
$$\frac{l_1}{l} = \frac{1}{4}$$

Spannung $u \sim$

Schnelle v



Smithdiagramm von $y_w = y_{w0} + y \frac{s}{j\omega}$
(gemessen)



$$v_B \frac{l}{l_1} = \Delta v = 60 \frac{cm}{sec} = konst.$$

$$l = 80 cm$$

$$f_0 = 110 Hz$$

